Die

Umformungen der Kettenbrüche.

Zur Erlangung der Doktorwürde

der

philosophischen Fakultät

der

Grossherzoglich Hessischen Ludwigsuniversität

zu Giessen

vorgelegt von

HERMANN BACH

aus Sprendlingen (Rheinhessen).

DARMSTADT
Buchdruckerei von H. Uhde
1903.

Die

Umformungen der Kettenbrüche.

Zur Erlangung der Doktorwürde

der

philosophischen Fakultät

der

Grossherzoglich Hessischen Ludwigsuniversität

zu Giessen

vorgelegt von

HERMANN BACH

aus Sprendlingen (Rheinhessen).

DARMSTADT
Buchdruckerei von H. Uhde
1903.

Genehmigt durch das Prüfungscollegium

14. 6. 1903.

Referent: **Dr. Netto.**

Die Umformungen der Kettenbrüche.

Es sei $\frac{Z}{N}$ ein positiver, echter, irreducibeler Bruch, den wir in einen Kettenbruch entwickeln wollen. Wir setzen

$$\frac{Z}{N} = \frac{1}{\frac{N}{Z}} = \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{Z}}; \quad \frac{r_1}{Z} = \frac{1}{\frac{Z}{r_1}} = \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}; \quad \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} = \frac{1}{q_3 + \frac{r_3}{r_2}};$$

(1)

$$\ldots \frac{r_{\lambda-1}}{r_{\lambda-2}} = \frac{1}{\frac{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}}} = \frac{1}{q_\lambda + \frac{r_\lambda}{r_{\lambda-1}}}; \ldots \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}} = \frac{1}{q_n}.$$

Dabei bedeuten q_1, q_2, q_3, $\ldots$ q_n diejenigen ganzen Zahlen, die dem wahren Wert von $\frac{N}{Z}$, $\frac{Z}{r_1}$, $\frac{r_1}{r_2}$, $\ldots$ $\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}$ am nächsten kommen, aber kleiner als dieser sind. $\frac{r_1}{Z}$, $\frac{r_2}{r_1}$, $\frac{r_3}{r_2}$, $\ldots$ $\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}$ sind also echte Brüche.

Es ist dann

$$\frac{Z}{N} = 1/q_1 + 1/q_2 + 1/q_3 + \ldots + 1/q_n. \tag{2}$$

Alle Glieder dieses Kettenbruchs sind positiv. Wir nennen ihn daher einen positiven Kettenbruch.

Bei den einzelnen Divisionen können wir aber auch auf andere Weise verfahren. Nehmen wir zum Quotienten stets diejenige ganze Zahl, die dem wahren Wert am nächsten kommt, aber grösser ist als dieser, so werden alle Reste negativ. Die Glieder des auf diese Weise entstehenden Kettenbruchs sind ausser dem ersten alle negativ. Wir nennen ihn daher einen negativen Kettenbruch. Es ist

$$\frac{Z}{N} = 1/q_1' - 1/q_2' - 1/q_3' - \ldots - 1/q_m'. \tag{3}$$

Wählen wir stets diejenige ganze Zahl zum Quotienten, die dem wahren Wert am nächsten kommt, einerlei, ob sie kleiner oder grösser als dieser ist, das heisst, führen wir die Divisionen stets so aus, dass der entstehende Rest kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, so erhalten wir, falls nicht der positive oder der negative Kettenbruch schon diese Eigen-

schaft haben, eine neue Entwickelung, diejenige nach kleinsten Resten. Die Glieder dieses Kettenbruchs können teils positiv, teils negativ sein.

Zu einer weiteren Entwicklung kommen wir, wenn wir den Quotienten stets so wählen, dass der entstehende Rest grösser als $\frac{1}{2}$ ist. Es ist das die Entwicklung nach grössten Resten. Auch bei diesem Kettenbruch können die Glieder verschiedene Vorzeichen haben. Schliesslich können wir bei der Wahl der Quotienten auch ganz willkürlich vorgehen, indem wir die Divisionen bald nach kleinsten, bald nach grössten Resten ausführen. Wir kommen so zu einer Reihe von neuen Entwickelungen.

Wir wollen nun zunächst zeigen, wie wir von der positiven Entwicklung zu jeder anderen gelangen können, ohne die Divisionen noch einmal durchzuführen.

I.

Übergang von der positiven Entwicklung zu der nach kleinsten Resten.

Haben wir einen positiven Kettenbruch (1), so kann er sich an einer gewissen Stelle nur dann von der an jener Stelle möglichen Entwicklung nach kleinstem Reste unterscheiden, wenn der folgende Teilnenner gleich 1 ist. Hat der Kettenbruch z. B. die Glieder

(4) $\cdot \cdot \cdot \cdot \; 1/q_\lambda + 1/1 + 1/q_{\lambda+2} + 1/q_{\lambda+3} + 1/q_{\lambda+4} + \cdot \cdot \cdot \cdot$,

so ist der auf q_λ folgende Rest $R = \dfrac{1}{1 + \dfrac{r_{\lambda+1}}{r_\lambda}}$, wobei $\dfrac{r_{\lambda+1}}{r_\lambda}$ ein echter Bruch ist. Der Nenner des Restes R ist daher kleiner als 2, d. h. der Rest R ist grösser als $\frac{1}{2}$.

q_λ ist entstanden durch Division der beiden Reste $r_{\lambda-2}$ und $r_{\lambda-1}$. Nach (1) ist nämlich

$$\frac{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} = q_\lambda + \frac{r_\lambda}{r_{\lambda-1}}\,; \quad \frac{r_{\lambda-1}}{r_\lambda} = q_{\lambda+1} + \frac{r_{\lambda+1}}{r_\lambda}\,;$$

(5) $$\frac{r_\lambda}{r_{\lambda+1}} = q_{\lambda+2} + \frac{r_{\lambda+2}}{r_{\lambda+1}} = q_{\lambda+2} + 1/q_{\lambda+3} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Da $q_{\lambda+1} = 1$ ist, so ist $r_{\lambda+1} = r_{\lambda-1} - r_\lambda$.

Um zur Entwicklung nach kleinsten Resten zu gelangen, müssen wir bei der Division $r_{\lambda-2} : r_{\lambda-1}$ statt q_λ den Quotienten $q_\lambda + 1$ nehmen. Der Rest wird dann negativ und ist gleich $r_{\lambda-1} - r_\lambda$.

Wir haben also:

$$\frac{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} = (q_\lambda + 1) - \frac{r_{\lambda-1} - r_\lambda}{r_{\lambda-1}}.$$

Bei der nächsten Division erhalten wir

$$\frac{r_{\lambda-1}}{r_{\lambda-1} - r_\lambda} = 1 + \frac{r_\lambda}{r_{\lambda-1} - r_\lambda}.$$

Es ist aber nach (5) $\dfrac{r_\lambda}{r_{\lambda-1} - r_\lambda} = \dfrac{r_\lambda}{r_{\lambda+1}} = q_{\lambda+2} + 1/q_{\lambda+3} + \cdots$.

Daher wird

$$\frac{r_{\lambda-1}}{r_{\lambda-1} - r_\lambda} = (1 + q_{\lambda+2}) + 1/q_{\lambda+3} + \cdots.$$

Die Glieder (4) gehen also über in

$$\cdots \; 1/(q_\lambda + 1) - 1/(1 + q_{\lambda+2}) + 1/q_{\lambda+3} + 1/q_{\lambda+4} + \cdots.$$

Ist also an irgend einer Stelle des positiven Kettenbruchs die Division nach grösstem Reste ausgeführt, so ist der folgende Teilnenner gleich 1. Wir gelangen an dieser Stelle zur Entwicklung nach kleinstem Reste, indem wir das Glied `1/1 weglassen, die Teilnenner des vorhergehenden und des nachfolgenden Gliedes um je 1 erhöhen und beide Glieder durch das negative Zeichen verbinden. Der Kettenbruch wird dabei um 1 Glied vermindert, und es tritt ein negatives Glied in die Entwicklung ein.

Ist auch $q_{\lambda+2} = 1$, so ist an 2 aufeinanderfolgenden Stellen die Division nach grösstem Reste ausgeführt. Entwickeln wir an der ersten Stelle nach kleinstem Reste, so erhalten wir

$$\cdots \; 1/(q_\lambda + 1) - 1/2 + 1/q_{\lambda+3} + 1/q_{\lambda+4} + \cdots.$$

An der zweiten Stelle tritt jetzt von selbst ein Rest auf, der $< \frac{1}{2}$ ist. Der 2. Teilnenner 1 hat also bei der Umwandlung keinen Einfluss. Es wird auch hier die Anzahl der Glieder um 1 vermindert, und es tritt ein negatives Glied auf.

Ist in (4) auch $q_{\lambda+3} = 1$, so betrachten wir zunächst die 3 ersten Glieder $1/q_\lambda + 1/1 + 1/1$. Sie gehen über in $1/(q_\lambda + 1) - 1/2$, so dass wir erhalten

$$\cdots \; 1/(q_\lambda + 1) - 1/2 + 1/1 + 1/q_{\lambda+4} + \cdots.$$

Nun betrachten wir die 3 letzten Glieder $1/2 + 1/1 + 1/q_{\lambda+4}$. Sie gehen über in $1/3 - 1/(1 + q_{\lambda+4})$. An Stelle von (4) treten

mithin die Glieder

(6) $\quad 1/(q_\lambda + 1) - 1/3 - 1/(1 + q_{\lambda+4}) + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$

Die Anzahl der Glieder wird um 2 erniedrigt, und es treten 2 negative Glieder auf. Ist auch $q_{\lambda+4} = 1$, so gilt dasselbe wie bei $q_{\lambda+2}$. Treten noch mehr Teilnenner $= 1$ hintereinander auf, so führt jedesmal dieselbe Überlegung zum Ziel. Es gilt daher folgende Regel:

So oft ein Teilnenner $= 1$ *vorkommt, dem weder ein Teilnenner* $= 1$ *folgt, noch ein solcher vorausgeht, so oft wird beim Übergang zur Entwicklung nach kleinsten Resten die Anzahl der Glieder des positiven Kettenbruchs um* 1 *erniedrigt. Tritt der Teilnenner* 1 *n-mal hintereinander auf, so wird die Anzahl der Glieder bei geradem n um* $\frac{n}{2}$, *bei ungeradem n um* $\frac{n+1}{2}$ *vermindert. Dabei treten ebensoviele negative Glieder in die Entwicklung ein, als die Anzahl der Verminderungen beträgt. Zu beachten ist dabei, dass, wenn eine Folge von Gliedern mit dem Teilnenner* 1 *am Anfang des Kettenbruchs auftritt, der* 1. *Teilnenner nicht mitzuzählen ist.*

II.

Übergang von der positiven Entwicklung zu der nach grössten Resten.

Bei dem positiven Kettenbruch ist überall dort nach kleinstem Reste entwickelt, wo der folgende Teilnenner von 1 verschieden ist Es sei in dem Kettenbruch

(7) $\quad 1/q_1 + 1/q_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + 1/q_\mu + 1/_{\mu+1} + 1q_{\mu+2} + \cdot\cdot\cdot\cdot + 1/q_n$

der Teilnenner $q_{\mu+1}$ grösser als 1.

Den Quotienten q_μ haben wir durch Division der Reste $r_{\mu-2}$ und $r_{\mu-1}$ erhalten. Nach (1) ist nämlich

$$\frac{r_{\mu-2}}{r_{\mu-1}} = q_\mu + \frac{r_\mu}{r_{\mu-1}}\,;\; r_\mu < \frac{1}{2}\, r_{\mu-1}\,,$$

$$\frac{r_{\mu-1}}{r_\mu} = q_{\mu+1} + \frac{r_{\mu+1}}{r_\mu}\,.$$

$\frac{r_{\mu+1}}{r_\mu}$ erscheint in der weiteren Entwicklung als

$$1/q_{\mu+2} + 1/q_{\mu+3} + \cdot\cdot\cdot\cdot + 1/q_n\,.$$

Wollen wir zur Entwicklung nach grössten Resten übergehen, so müssen wir bei der Division $r_{\mu-2} : r_{\mu-1}$ statt q_μ den Quotienten

$q_\mu + 1$ nehmen. Der Rest wird dann negativ und gleich $\frac{r_{\mu-1} - r_\mu}{r_{\mu-1}}$. Es ist also

$$\frac{r_{\mu-2}}{r_{\mu-1}} = (q_\mu + 1) - \frac{r_{\mu-1} - r_\mu}{r_{\mu-1}} .$$

Der Rest $r_{\mu-1} - r_\mu$ ist grösser als $\frac{1}{2} r_{\mu-1}$. Daher muss der nächste Quotient, den wir durch Division der Reste $r_{\mu-1}$ und $r_{\mu-1} - r_\mu$ erhalten, gleich 1 sein.

$$\frac{r_{\mu-1}}{r_{\mu-1} - r_\mu} = 1 + \frac{r_{\mu-1} - (r_{\mu-1} - r_\mu)}{r_{\mu-1} - r_\mu} = 1 + \frac{r_\mu}{r_{\mu-1} - r_\mu} .$$

Den nächsten Quotienten liefert die Division $(r_{\mu-1} - r_\mu) : r_\mu$. Es ist aber $\frac{r_{\mu-1} - r_\mu}{r_\mu} = -1 + \frac{r_{\mu-1}}{r_\mu}$.

Nun war $\frac{r_{\mu-1}}{r_\mu} = q_{\mu+1} + \frac{r_{\mu+1}}{r_\mu}$. Mithin wird

$$\frac{r_{\mu-1} - r_\mu}{r_\mu} = (q_{\mu+1} - 1) + \frac{r_{\mu+1}}{r_\mu} = (q_{\mu+1} - 1) + 1/q_{\mu+2} + 1/q_{\mu+3} + \cdots + 1/q_n .$$

Der Kettenbruch (7) geht also über in

$$(8) \qquad 1/q_1 + 1/q_2 + \cdots + 1/(q_\mu + 1) - 1/1 + 1/(q_{\mu+1} - 1) + 1/q_{\mu+2} + \cdots + 1/q_n .$$

Ist in dieser neuen Entwicklung $q_{\mu+1} - 1$ auch grösser als 1, so wenden wir auf die Glieder $1/1 + 1/(q_{\mu+1} - 1)$ dasselbe Verfahren noch einmal an. Wir erhalten dann

$$1/q_1 + 1/q_2 + \cdots + 1/(q_\mu + 1) - 1/2 - 1/1 + 1/(q_{\mu+1} - 2) + 1/q_{\mu+2} + \cdots + 1/q_n .$$

Ist $q_{\mu+1} - 2$ noch grösser als 1, so fahren wir auf die gleiche Weise fort, bis der Teilnenner $q_{\mu+1}$ auf 1 erniedrigt ist. (7) geht dann über in

$$(9) \qquad 1/q_1 + 1/q_2 + \cdots + 1/(q_\mu + 1) - \underbrace{1/2 - 1/2 - \cdots - 1/2}_{(q_{\mu+1} - 2)\text{-mal}} - 1/1 + 1/1 + 1/q_{\mu+2} + \cdots + 1/q_n .$$

Von $1/(q_\mu + 1)$ bis vor $1/q_{\mu+2}$ haben wir nun Entwicklung nach grössten Resten, denn auch alle Reste, deren Nenner gleich 2, vermindert um einen echten Bruch, sind, haben einen grösseren Wert als $\frac{1}{2}$.

Haben wir also in dem positiven Kettenbruch an einer Stelle keine Entwicklung nach grössten Resten, so ist der folgende Teilnenner grösser als 1. *Um zur Entwicklung nach grössten Resten zu gelangen, müssen wir an der betreffenden Stelle den Quotienten um* 1 *erhöhen. Das folgende Glied, das den Teilnenner* $q_{\mu+1} > 1$ *hat, wird durch* $q_{\mu+1}$ *Glieder ersetzt, von denen die* $q_{\mu+1} - 2$ *ersten gleich* $-1/2$, *die beiden letzten* $-1/1 + 1/1$ *sind.*

Wenden wir dasselbe Verfahren auf alle Glieder an, deren Teilnenner von 1 verschieden sind, so erhalten wir die Entwicklung nach grössten Resten. Eine Ausnahme bildet der Teilnenner 2, wenn er als letzter Teilnenner der positiven Entwicklung auftritt. Der vorletzte Teilnenner q_{n-1} ist dann entstanden durch Division von $r_{n-3} : 2$. Eine Division mit 2 liefert aber stets einen Rest, der gleich $\frac{1}{2}$ ist. Es ist

$$\frac{r_{n-3}}{2} = q_{n-1} + 1/2 = (q_{n-1} + 1) - 1/2 .$$

Von einer Entwicklung nach kleinstem oder grösstem Rest kann also hier keine Rede sein. Die Entwicklung nach grössten Resten kann daher schliessen mit $1/q_{n-1} + 1/2$ oder mit $1/(q_{n-1} + 1) - 1/2$.

III.

Übergang von der positiven Entwicklung zur negativen.

Der positive Kettenbruch sei wieder

(10) $$1/q_1 + 1/q_2 + 1/q_3 + \cdots + 1/q_n .$$

Wir nehmen vorerst an, dass alle Teilnenner mit geradem Index grösser als 1 seien. Da $q_2 > 1$ ist, können wir nach dem in II besprochenen Verfahren für $1/q_1 + 1/q_2 + 1/q_3$ schreiben

$$1/(q_1 + 1) - \underbrace{1/2 - 1/2 - \cdots - 1/2}_{(q_2 - 2)\text{-mal}} - 1/1 + 1/1 + 1/q_3 .$$

Die 3 letzten Glieder $1/1 + 1/1 + 1/q_3$ können wir aber nach der in I aufgestellten Regel zusammenfassen in $1/2 - 1/(1 + q_3)$. (10) verwandelt sich dann in

(11) $$1/(q_1 + 1) - \underbrace{1/2 - 1/2 - \cdots - 1/2}_{(q_2 - 1)\text{-mal}} - 1/(1 + q_3) + 1/q_4 + 1/q_5 + \cdots + 1/q_n .$$

Das Glied $-1/2$ erscheint $(q_2 - 1)$ mal, die Teilnenner q_1 und q_3 sind um 1 vermehrt. Das 1. positive Glied in (11) ist jetzt

$1/q_4$. Da $q_4 > 1$ ist, können wir dieselbe Umformung vornehmen wie mit dem Gliede $1/q_2$. (11) geht dann über in

(12) $1/(q_1 + 1) - 1/2 - 1/2 - \cdots - 1/2 - 1/(1 + q_3 + 1) - 1/2 - 1/2 - \cdots - 1/2 - 1/(1 + q_5) + 1/q_6 + \cdots + 1/q_n$.

Das 1. positive Glied dieser neuen Entwicklung ist $1/q_6$. Dieses, sowie alle folgenden Glieder mit geradem Index, formen wir auf gleiche Weise um.

Der Kettenbruch hat dann lauter negative Glieder. An Stelle jedes Gliedes $1/q_\lambda$ mit geradem Index treten $q_\lambda - 1$ Glieder $= -1/2$ auf, der Teilnenner des 1. Gliedes ist um 1, der jedes anderen Gliedes mit ungeradem Index um 2 vermehrt.

Es ist jetzt nur noch darauf zu achten, ob die Zahl der Glieder des positiven Kettenbruchs gerade oder ungerade ist. Im ersten Fall schliesst die negative Entwicklung mit

$$\cdots - 1/(q_{n-1} + 2) - \underbrace{1/2 - 1/2 - \cdots - 1/2}_{(q_n - 1)\text{-mal}},$$

im zweiten mit

$$\cdots - 1/(q_{n-2} + 2) - \underbrace{1/2 - 1/2 - \cdots - 1/2}_{(q_{n-1} - 1)\text{-mal.}} - 1/(q_n + 1)$$

Nun wollen wir auch solche Teilnenner mit geradem Index zulassen, die gleich 1 sind. Hat der positive Kettenbruch die Glieder

$$\cdots + 1/q_{2\nu+1} + 1/1 + 1/q_{2\nu+3} + \cdots,$$

so gehen diese nach I über in

$$\cdots + 1/(q_{2\nu+1} + 1) - 1/(q_{2\nu+3} + 1) + \cdots.$$

Wir können daher auch für diesen Fall sagen: An Stelle des Gliedes $1/q_{2\nu+2} = 1/1$ treten $q_{2\nu+2} - 1$, d. h. 0 Glieder $= -1/2$ auf. Der vorhergehende und der nachfolgende Teilnenner werden um 1 erhöht.

Haben wir also einen beliebigen positiven Kettenbruch, so kommen wir auf folgende Weise zur zugehörigen negativen Entwicklung:

An Stelle jedes Gliedes $1/q_\lambda$ mit geradem Index, wobei q_λ auch $= 1$ sein darf, setzen wir $q_\lambda - 1$ Glieder $= -1/2$. Alle Teilnenner mit ungeradem Index werden um 2, der Teilnenner des 1. Gliedes aber und, wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist, auch der des letzten Gliedes nur um 1 erhöht.

IV.

Übergang von der negativen Entwicklung zur positiven.

Der negative Kettenbruch sei

$$1/q_1 - 1/q_2 - 1/q_3 - \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot - 1/q_n . \tag{13}$$

Wir nehmen vorerst an, alle Teilnenner seien grösser als 2. Nach dem Bildungsgesetz des Kettenbruchs ist

$$\frac{N}{Z} = \frac{1}{\frac{N}{Z}} = \frac{1}{q_1 - \frac{r_1}{Z}} ; \quad \frac{Z}{r_1} = q_2 - \frac{r_2}{r_1} ;$$

$$\frac{r_1}{r_2} = 1/q_3 - 1/q_4 - \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot - 1/q_n .$$

Wollen wir zur positiven Entwicklung übergehen, so müssen wir bei der 1. Division statt q_1 den Quotienten $q_1 - 1$ nehmen. Der Rest wird dann positiv. Wir haben dann folgende Divisionen:

$$\frac{N}{Z} = (q_1 - 1) + \frac{Z - r_1}{Z} ; \quad \frac{Z}{Z - r_1} = 1 + \frac{r_1}{Z - r_1} ;$$

$$\frac{Z - r_1}{r_1} = -1 + \frac{Z}{r_1} = -1 + q_2 - \frac{r_2}{r_1} = (q_2 - 1) - 1/q_3 - 1/q_4 - \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot - 1/q_n .$$

Die Glieder $1/q_1 - 1/q_2$ gehen also über in

$$1/(q_1 - 1) + 1/1 + 1/(q_2 - 1).$$

Dasselbe Resultat hätte uns auch sofort die Umkehrung des in I angestellten Verfahrens geliefert. Dort haben wir bewiesen, dass die Glieder $1/q_\varrho + 1/1 + 1/q_{\varrho+2}$ ersetzt werden können durch $1/(q_\varrho + 1) - 1/(q_{\varrho+2} + 1)$. Da unser Beweis ganz unabhängig davon war, was $1/q_\varrho$ und $1/q_{\varrho+3}$ für Vorzeichen hatten, so können wir umgekehrt sagen: Die Glieder $1/(q_\varrho + 1) - 1/(q_{\varrho+2} + 1)$ lassen sich ersetzen durch $1/q_\varrho + 1/1 + 1/q_{\varrho+2}$. Wenden wir das auf unsern negativen Kettenbruch an, so sehen wir, dass wir sofort zur positiven Entwicklung kommen, wenn wir zwischen je 2 Glieder das Glied 1/1 einschieben und alle Teilnenner um 2, den ersten und letzten aber nur um 1 vermindern.

Auf andere Weise müssen wir vorgehen, wenn Teilnenner vorkommen, die gleich 2 sind. Ist der 1. Teilnenner gleich 2, so wird das 1. Glied ebenso behandelt, als wenn sein Teilnenner grösser als 2 wäre. Stehen zwischen 2 negativen Gliedern, deren Teilnenner

grösser als 2 ist, ein Glied oder mehrere Glieder mit dem Teilnenner 2, so können wir einfach das Verfahren von III umkehren. Für n aufeinanderfolgende Glieder von der Form $-\ 1\ 2$ setzen wir ein positives Glied mit dem Teilnenner $n+1$. Die Teilnenner des vorhergehenden und des nachfolgenden Gliedes werden um 1 erniedrigt. Stehen 2 oder mehr Glieder mit dem Teilnenner 2 am Schlusse der negativen Entwicklung, so werden sie in derselben Weise behandelt. Steht das Glied $-\ 1\ 2$ nur einmal am Schlusse der Entwicklung, so setzt man statt $1/q_{n-1} - 1/2$ die gleichwertigen Glieder $1/(q_{n-1} - 1) + 1/2$.

V.

Die längsten und die kürzesten Entwicklungen.

Haben wir einen beliebigen Kettenbruch, so ist an den Stellen nach grösstem Rest entwickelt, wo der folgende Rest mit $1/1 +$ oder mit $1\ 2 -$ beginnt. Es können also folgende Gruppen von Gliedern auftreten:

$$1/q_\varkappa + 1/1 + 1/q_{\varkappa+2},\quad 1/q_\lambda - 1/1 + 1/q_{\lambda+2},$$
$$1/q_\mu + 1/2 - 1/q_{\mu+2},\quad 1/q_\nu - 1/2 - 1/q_{\nu+2}.$$

Gehen wir zur Entwicklung nach kleinsten Resten über, so verwandeln sich diese Gruppen nach I — IV in:

$$1/(q_\varkappa + 1) - 1/(q_{\varkappa+2} + 1),\quad 1/(q_\lambda - 1) + 1/(q_{\lambda+2} + 1),$$
$$1/(q_\mu + 1) - 1/2 + 1/(q_{\mu+2} - 1),\quad 1/(q_\nu - 1) + 1/2 + 1/(q_{\nu+2} - 1).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser 4 Umformungen können wir von jeder beliebigen Entwicklung zu der nach kleinsten Resten gelangen. Bei jedem einzelnen Schritt der Umformung bleibt aber, wie uns diese 4 Fälle zeigen, die Anzahl der Glieder dieselbe, oder sie wird um 1 vermindert. Wir können daraus den Schluss ziehen:

Keine Entwicklung eines echten Bruches ist kürzer als die Entwicklung nach kleinsten Resten.

Im allgemeinen gibt es nur eine Entwicklung nach kleinsten Resten. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn bei der letzten Division der Divisor 2 erscheint. Wir erhalten dann 2 gleichwertige Entwicklungen nach kleinsten Resten, von denen die eine mit $1/q_{n-1} + 1/2$, die andere mit $1/(q_{n-1} + 1) - 1/2$ schliesst.

Wie die beiden letzten Fälle oben zeigen, lassen sich stets andere Entwicklungen angeben, die dieselbe Gliederzahl haben wie

die Entwicklung nach kleinsten Resten, wenn die letztere, abgesehen vom ersten und letzten Glied, Glieder von der Form 1/2 enthält.

Bei einem beliebigen Kettenbruch ist überall dort nach kleinstem Rest entwickelt, wo der folgende Teilnenner grösser als 2 oder nur dann gleich 2 ist, wenn auf das Glied 1 2 ein positiver Rest folgt. Bei den Gliedern

$$1/q_\lambda + 1/q_{\lambda+1} \text{ und } 1/q_\mu - 1/q_{\mu+1}$$

sind also die Quotienten q_λ und q_μ durch Division nach kleinstem Rest entstanden, wenn $q_{\lambda+1}$ und $q_{\mu+1}$ grösser als 2 oder nur dann gleich 2 sind, wenn $1/q_{\lambda+2}$ und $1/q_{\mu+2}$ positiv sind. Gehen wir zur Entwicklung nach grössten Resten über, so verwandeln sich die beiden Gliederpaare nach I — IV in:

$$1/(q_\lambda + 1) - 1/1 + 1/(q_{\lambda+1} - 1) \text{ und}$$
$$1/(q_\mu - 1) + 1/1 + 1/(q_{\mu+1} - 1).$$

Durch mehrfache Anwendung dieser Umformungen kommen wir von jeder beliebigen Entwicklung zu der nach grössten Resten. Bei jedem Schritt der Umformung wird aber, wie diese beiden nur möglichen Fälle zeigen, die Anzahl der Glieder um 1 vermehrt. Daraus folgt der Satz:

Von allen Entwicklungen eines echten Bruches ist die Entwicklung nach grössten Resten die längste.

Da bei der Entwicklung nach grössten Resten alle Reste grösser als $\frac{1}{2}$ sein müssen, so kann dieselbe, abgesehen vom ersten Gliede, nur Glieder von der Form $\pm 1/1 +$ oder $\pm 1/2 -$ enthalten. Am Schlusse können wir statt $1, 1 + 1/2$ auch $1/2 - 1/2$ schreiben. Es gibt daher stets 2 gleichwertige Entwicklungen nach grössten Resten. Wie aus den in II angestellten Überlegungen hervorgeht, *muss die Anzahl der Glieder der längsten Entwicklungen gleich der Summe der Teilnenner der positiven Entwicklung sein, wenn man dabei den 1. Teilnenner nicht mitzählt.*

VI.

Bestimmung der Anzahl der Entwicklungen eines echten Bruches.

Haben wir den echten Bruch $\frac{Z}{N}$ in einen positiven Kettenbruch entwickelt, so können wir durch allmähliche Umformung der einzelnen

Glieder und passende Zuordnung der verschiedenen Fassungen zu allen andern Entwicklungen kommen.

Nehmen wir den zweigliedrigen Kettenbruch $1/q_1 + 1/q_2$, so gelangen wir zur 1. Umformung, wenn wir nach II den Teilnenner q_1 um 1 vermehren und für das 2. Glied die beiden Glieder $-1/1 + 1/(q_2 - 1)$ setzen. Wir erhalten so die neue Entwicklung $1/(q_1 + 1) - 1/1 + 1/(q_2 - 1)$. Ist in dieser $q_2 - 1$ grösser als 2, so vermehren wir wieder den Teilnenner 1 um 1 und ersetzen $1/(q_2 - 1)$ durch die beiden Glieder $-1/1 + 1/(q_2 - 2)$. In dieser Weise fahren wir fort, bis der letzte Teilnenner auf 2 erniedrigt ist. So erhalten wir $q_2 - 2$ Umformungen. Zu einer weiteren kommen wir, wenn wir berücksichtigen, dass wir am Schlusse für $1 + 1/2$ auch $2 - 1/2$ setzen dürfen. Durch die Umformung des Gliedes $1/q_2$ entstehen also $q_2 - 1$ neue Entwicklungen. Der Bruch hat daher zusammen q_2 Entwicklungen. q_2 ist aber der Zähler des durch den zweigliedrigen Kettenbruch dargestellten Bruches. Folglich ist für diesen Bruch die Anzahl der Entwicklungen gleich seinem Zähler.

Es ist

$$
\begin{aligned}
1/q_1 + 1/q_2 &= 1/(q_1 + 1) - 1/1 + 1/(q_2 - 1) \\
&= 1/(q_1 + 1) - 1/2 - 1/1 + 1/(q_2 - 2) \\
&= 1/(q_1 + 1) - 1/2 - 1/2 - 1/1 + 1/(q_2 - 3) \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= 1/(q_1 + 1) - \underbrace{1/2 - 1/2 - \cdots - 1/2}_{(q_2 - 3)\text{-mal}} - 1/1 + 1/2 \\
&= 1/(q_1 + 1) - \underbrace{1/2 - 1/2 - \cdots - 1/2 - 1/2}_{(q_2 - 1)\text{-mal}}.
\end{aligned}
$$

Beispiel: $\frac{4}{9} = 1/2 + 1/4 = 1/3 - 1/2 - 1/1 + 1/2$
$= 1/3 - 1/1 + 1/3 = 1/3 - 1/2 - 1/2 - 1/2.$

Bei dem dreigliedrigen Kettenbruch $1/q_1 + 1/q_2 + 1/q_3$ formen wir zuerst nach II das mittelste Glied in folgender Weise um:

$1/q_1$	$+ 1/q_2$	$+ 1/q_3$
$= 1/(q_1 + 1)$	$- 1/1 + 1/(q_2 - 1)$	$+ 1/q_3$
$= 1/(q_1 + 1)$	$- 1/2 - 1/1 + 1/(q_2 - 2)$	$+ 1/q_3$
$= \cdots$	$\cdots\cdots\cdots$	$\cdots$
$= 1/(q_1 + 1)$	$- 1/2 - 1/2 - \cdots - 1/1 + 1/1$	$+ 1/q_3.$

Wir erhalten so q_2 verschiedene Entwicklungen. In jeder derselben lässt sich das letzte Glied nach II noch in $q_3 - 1$ anderen

Fassungen zuordnen, indem wir den letzten Teilnenner der betreffenden Form von $1/q_2$ um 1 erhöhen und statt $1/q_3$ der Reihe nach eine der folgenden Formen setzen:

$$
\begin{aligned}
&- 1/1 + 1/(q_3 - 1),\\
&- 1/2 - 1/1 + 1/(q_3 - 2),\\
&- 1/2 - 1/2 - 1/1 + 1/(q_3 - 3),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&- \underbrace{1/2 - 1/2 - \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot - 1/2}_{(q_3 - 3)\text{-mal}} - 1/1 + 1/2,\\
&- \underbrace{1/2 - 1/2 - \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot - 1/2 - 1/2}_{(q_3 - 1)\text{-mal}}.
\end{aligned}
$$

Wir kommen so zu $q_2 \cdot q_3$ Entwicklungen. Die letzte Umformung von $1/q_2$ hat am Schlusse die Glieder $-1/1 + 1/1 + 1/q_3$. Diese lassen sich nach I zusammenfassen in $-1/2 - 1/(1 + q_3)$ und geben so Anlass zu einer neuen Entwicklung. Wir haben mithin zusammen $q_2 q_3 + 1$ Entwicklungen. $q_2 q_3 + 1$ ist aber der Zähler des durch den dreigliedrigen Kettenbruch dargestellten Bruches. Also ist auch bei diesem die Anzahl der Entwicklungen gleich seinem Zähler.

Nachdem wir für den zwei- und den dreigliedrigen Kettenbruch die Übereinstimmung der Anzahl der Entwicklungen mit dem Zähler des dargestellten Bruches nachgewiesen haben, können wir den Beweis durch den Schluss von n auf $n + 1$ leicht verallgemeinern. Wir nehmen an, für einen Kettenbruch von $n - 1$ und für einen solchen von n Gliedern sei der Satz bewiesen.

Haben wir nun einen Kettenbruch von $n + 1$ Gliedern, so betrachten wir ihn zunächst bis zu seinem n. Glied Diesen n-gliedrigen Kettenbruch kann ich nach unserer Annahme in Z_n-facher Weise darstellen, wenn Z_n der Zähler des durch die ersten n Glieder dargestellten Bruches ist. Nun kommt das Glied $1/q_{n+1}$ hinzu. Dieses kann q_{n+1} verschiedene Fassungen erhalten. Jede davon kann jeder der Z_n Entwicklungen der n ersten Glieder zugeordnet werden. Dadurch entstehen $Z_n \cdot q_{n+1}$ verschiedene Entwicklungen. Die letzte Fassung von $1/q_n$ endet, wenn das letzte Glied $1/q_{n+1}$ in seiner ursprünglichen Gestalt zugefügt wird, auf $-1/1 + 1/1 + 1/q_{n+1}$. Diese 3 Glieder lassen sich zusammenfassen in $1/2 - 1/(1 + q_{n+1})$. Nun können wir aber diese Änderung in soviel Entwicklungen vornehmen, als die $n-1$ ersten Glieder zulassen, da zu jeder die beiden

letzten Glieder einmal in dieser Form hinzutreten. Das sind aber Z_{n-1} Entwicklungen, wenn Z_{n-1} der Zähler des durch die ersten $n-1$ Glieder dargestellten Bruches ist. Mithin liefert diese Änderung noch Z_{n-1} neue Entwicklungen. Wir haben daher zusammen $Z_n \cdot q_{n+1} + Z_{n-1}$ verschiedene Entwicklungen. Diese Anzahl erhalten wir aber auf dieselbe Art, wie wir den Zähler des durch den $(n+1)$-gliedrigen Kettenbruch dargestellten Bruches aus den Zählern der durch den $(n-1)$- und den n-gliedrigen Kettenbruch dargestellten Brüche erhalten. Es gilt daher allgemein der Satz:

Die Anzahl der Entwicklungen eines echten Bruches ist gleich dem Zähler dieses Bruches.

Der Bruch $\frac{m}{n}$ hat also m Entwicklungen. Der Bruch $\frac{n-m}{n}$, der ihn zur Einheit ergänzt, hat $n-m$ Entwicklungen. Lassen wir nun für die echten Brüche Entwicklungen zu, die mit 1 — beginnen, so können wir den Bruch $\frac{m}{n}$ darstellen als $1 - \frac{n-m}{n}$. Wir erhalten dann für $\frac{m}{n}$ noch $n-m$ neue Entwicklungen, zusammen also $m + n - m = n$ Entwicklungen. Unter diesen abgeänderten Bedingungen gilt daher der Satz:

Die Anzahl der Entwicklungen eines echten Bruches ist gleich dem Nenner dieses Bruches.

Beispiel: $\frac{4}{9} = 1/2 + 1/4$
$= 1/3 - 1/1 + 1/3$
$= 1/3 - 1/2 - 1/1 + 1/2$
$= 1/3 - 1/2 - 1/2 - 1/2$

$= 1 - \frac{5}{9} = 1 - 1/1 + 1/1 + 1/4$
$= 1 - 1/1 + 1/2 - 1/1 + 1/3$
$= 1 - 1/1 + 1/2 - 1/2 - 1/1 + 1/2$
$= 1 - 1/1 + 1/2 - 1/2 - 1/2 - 1/2$
$= 1 - 1/2 - 1/5$.

VII.

Änderung der Reihe der Näherungswerte bei der Umformung.

Haben wir den echten Bruch $\frac{Z}{N}$ in einen positiven Kettenbruch entwickelt, so liefern die Haupt- und Nebennäherungsbrüche des letzteren alle Näherungswerte von $\frac{Z}{N}$, und zwar jeden nur einmal.

Teilen wir die Reihe der Näherungswerte, wie sie sich aus dem positiven Kettenbruch ergibt, in Serien ein, die den einzelnen Teilnennern entsprechen, so haben alle Serien mit ungeradem Index nur Näherungswerte, die $> \frac{Z}{N}$, alle Serien mit geradem Index nur solche, die $< \frac{Z}{N}$ sind.

Wir beginnen nun mit der Umformung, indem wir zuerst das Glied $1/q_2$ schrittweise umgestalten. Wir erhalten zunächst

$$1/(q_1 + 1) - 1/1 + 1/(q_2 - 1) + 1/q_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot .$$

Bilden wir von dieser Entwicklung die Reihe der Näherungswerte, so erhalten wir eine Serie mehr. Der 1. Näherungswert der urspr. 2. Serie ist zur 1. Serie hinzugetreten, so dass diese nun $q_1 + 1$ Näherungswerte hat. Die 2. Serie hat nur einen Näherungswert, und zwar ist dieser, da $1(q_1 + 1) - 1/1 = 1/q_1$ ist, gleich dem letzten Näherungswerte der urspr. 1. Serie, er ist mithin eine Wiederholung. Bei der weiteren Änderung von $1/q_2$ erhalten wir

$$1(q_1 + 1) - 1/2 - 1/1 + 1/(q_2 - 2) + 1/q_3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot .$$

Es tritt nun der 1. Näherungswert der $q_2 - 1$ entsprechenden Serie zu dem Näherungswert, der dem Teilnenner 1 entspricht, hinzu, und dieser selbst bildet als Wiederholung eine neue Serie. Führen wir die Umformung des Gliedes $1/q_2$ so zu Ende, so tritt jedesmal aus der urspr. 2. Serie ein weiterer Näherungswert zu der vorhergehenden Serie. Es entsteht immer eine neue Serie, bis die urspr. 2. Serie auf einen Näherungswert reduziert ist. Nun beginnt die Umformung des Gliedes $1/q_3$. Der 1. Näherungswert der Serie, die q_3 entspricht, tritt zu der q_2 entsprechenden Serie, bezw. zu der letzten der seinen Umformungen entsprechenden Serien hinzu, und der letzte Näherungswert dieser Serie bildet als Wiederholung eine neue Serie. Dann fahren wir mit der Umformung des Gliedes $1/q_3$ fort.

S[illegible]alle Umformungen durch, die durch Änderung von G[illegible]nner grösser als 1 ist, bedingt sind. Bei jedem Schritt wird die Anzahl der Serien um 1 vermehrt.

Nun kommen die Umformungen, die durch Glieder mit dem Nenner 1 bedingt werden. Haben wir z. B. die Glieder $1/q_\lambda + 1/1 + 1/q_{\lambda+2}$, so gehen diese über in $1/(q_\lambda + 1) - 1/(q_{\lambda+2} + 1)$. Das äussert sich in der Reihe der Näherungswerte folgendermassen:

Der Näherungswert, der dem mittelsten Glied entspricht, tritt in die vorhergehende Serie ein, und der letzte Näherungswert dieser Serie tritt als Wiederholung als 1. Näherungswert in die Serie ein, die $\eta_{\lambda+2}$ entspricht. Es wird also bei einer jeden derartigen Umformung die Zahl der Serien um 1 vermindert.

Den einzelnen Umformungen des Kettenbruchs $1,2+1/3+1/4$ entsprechen z. B. die daneben stehenden Serien der Näherungswerte.

1 2	$+\,1\,3$	$+\,1\,4$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} 1\ 1 & 1\ 2\ 3 & 4\ 7\ 10\ 13 \\ 1\ 2 & 3\ 5\ 7 & 9\ 16\ 23\ 30 \end{array}$
1 3	$-1/1+1/2$	$+\,1/4$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} 1\ 1\ 1 & 1\ 2\ 3 & 4\ 7\ 10\ 13 \\ 1\ 2\ 3 & 2\ 5\ 7 & 9\ 16\ 23\ 30 \end{array}$
1 3	$-1\,2-1\,1+1\,1+1\,4$		$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} 1\ 1\ 1 & 1\ 2 & 1 & 3 & 4\ 7\ 10\ 13 \\ 1\ 2\ 3 & 2\ 5 & 2 & 7 & 9\ 16\ 23\ 30 \end{array}$
1 2	$+\,1\,4$	$-1\,1+1/3$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} 1\ 1\ 1 & 2\ 3\ 4 & 3 & 7\ 10\ 13 \\ 1\ 2 & 3\ 5\ 7\ 9 & 7 & 16\ 23\ 30 \end{array}$
1 2	$+1/4$	$-1\,2-1/1+1/2$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c} 1\ 1 & 1\ 2\ 3\ 4 & 3\ 7 & 3 & 10\ 13 \\ 1\ 2 & 3\ 5\ 7\ 9 & 7\ 16 & 7 & 23\ 30 \end{array}$
1 2	$+1,4$	$-1\,2-1/2-1/2$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c} 1\ 1 & 1\ 2\ 3\ 4 & 3\ 7 & 3\ 10 & 3\ 13 \\ 1\ 2 & 3\ 5\ 7\ 9 & 7\ 16 & 7\ 23 & 7\ 30 \end{array}$
1 3	$-1/1+1/3$	$-1\,1+1\,3$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c} 1\ 1\ 1 & 1 & 2\ 3\ 4 & 3 & 7\ 10\ 13 \\ 1\ 2\ 3 & 2 & 5\ 7\ 9 & 7 & 16\ 23\ 30 \end{array}$
1 3	$-1\,1+1/3$	$-1\,2-1\,1+1/2$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} 1\ 1\ 1 & 1 & 2\ 3\ 4 & 3\ 7 & 3 & 10\ 13 \\ 1\ 2\ 3 & 2 & 5\ 7\ 9 & 7\ 16 & 7 & 23\ 30 \end{array}$
1,3	$-1\,1+1/3$	$-1\,2-1/2-1\,2$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} 1\ 1\ 1 & 1 & 2\ 3\ 4 & 3\ 7 & 3\ 10 & 3\ 13 \\ 1\ 2\ 3 & 2 & 5\ 7\ 9 & 7\ 16 & 7\ 23 & 7\ 30 \end{array}$
1 3	$-1/2-1/1+1/2$	$-1/1+1/3$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} 1\ 1\ 1 & 1\ 2 & 1 & 3\ 4 & 3 & 7\ 10\ 13 \\ 1\ 2\ 3 & 2\ 5 & 2 & 7\ 9 & 7 & 16\ 23\ 30 \end{array}$
1/3	$-1/2-1/1+1/2$	$-1/2-1/1+1/2$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} 1\ 1\ 1 & 1\ 2 & 1 & 3\ 4 & 3\ 7 & 3 & 10 & 3\ 13 \\ 1\ 2\ 3 & 2\ 5 & 2 & 7\ 9 & 7\ 16 & 7 & 23 & 7\ 30 \end{array}$
1 3	$-1\,2-1/1+1,2$	$-1/2-1/2-1/2$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} 1\ 1\ 1 & 1\ 2 & 1 & 3\ 4 & 3\ 7 & 3 & 10 & 3 & 13 \\ 1\ 2\ 3 & 2\ 5 & 2 & 7\ 9 & 7\ 16 & 7 & 23 & 7 & 30 \end{array}$
1/3	$-1/2-1/2$	$-1/5$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} 1\ 1\ 1 & 1\ 2 & 1\ 3 & 1\ 4 & 7 & 10\ 13 \\ 1\ 2\ 3 & 2\ 5 & 2\ 7 & 2\ 9 & 16\ 23\ 30 \end{array}$

Wenn uns umgekehrt die Reihe der Näherungswerte eines Bruches, wie sie dem positiven Kettenbruch entspricht, gegeben ist,

so können wir sofort die Reihen der Näherungswerte aufstellen, wie sie allen Umformungen entsprechen, und so zu allen Entwicklungen des Bruches gelangen.

VIII.

Änderung der Kettenbruchrelation bei der Umformung.

Zwischen den Hauptnäherungsbrüchen des positiven Kettenbruchs

(14) $$1/q_1 + 1/q_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + 1/q_\lambda$$

besteht die Relation:

(15) $$P_n\, Q_{n-1} - P_{n-1}\, Q_n = (-1)^{n-1},$$

wenn $\frac{P_n}{Q_n}$ der zum Teilnenner q_n gehörige Hauptnäherungsbruch ist. Haben wir die beiden aufeinanderfolgenden Näherungswerte $\frac{P_\varkappa}{Q_\varkappa}$ und $\frac{P_{\varkappa+1}}{Q_{\varkappa+1}}$, und ist $\frac{P_\varkappa}{Q_\varkappa} > \frac{Z}{N}$, $\frac{P_{\varkappa+1}}{Q_{\varkappa+1}} < \frac{Z}{N}$, dann ist die Differenz $P_{\varkappa+1}\, Q_\varkappa - Q_{\varkappa+1}\, P_\varkappa = -1$. Im umgekehrten Falle ist diese Differenz gleich $+1$. Sind $\frac{P_\varkappa}{Q_\varkappa}$ und $\frac{P_{\varkappa+1}}{Q_{\varkappa+1}}$ derselben Serie entnommen, d. h. sind beide entweder grösser oder kleiner als $\frac{Z}{N}$, so ist die Differenz $P_{\varkappa+1}\, Q_\varkappa - P_\varkappa\, Q_{\varkappa+1}$ gleich $+1$ oder -1, je nachdem $\frac{P_{\varkappa+1}}{Q_{\varkappa+1}}$ grösser oder kleiner als $\frac{P_\varkappa}{Q_\varkappa}$ ist.

Nachdem wir dies vorausgeschickt haben, beginnen wir mit der Umformung des positiven Kettenbruchs, und zwar ändern wir zuerst das zweite Glied $1/q_2$. Wir kommen zunächst zu $1/(q_1 + 1) - 1/1 + 1/(q_2 - 1) + \cdot\cdot\cdot\cdot$. Zwischen den Hauptnäherungsbrüchen, die jetzt den beiden ersten Teilnennern entsprechen, kann die Relation (15) nicht mehr bestehen. Während vorher an 1. Stelle ein Näherungswert stand, der $> \frac{Z}{N}$, an zweiter Stelle ein solcher, der $< \frac{Z}{N}$ war, ist es jetzt umgekehrt. Die Differenz $P_n\, Q_{n-1} - P_{n-1}\, Q_n$ muss daher jetzt das entgegengesetzte Vorzeichen haben. Sie ist gleich $(-1)^1 \cdot (-1)$.

Die jetzt zwischen dem 2. und 3. Hauptnäherungsbruch bestehende Relation muss entsprechend der zwischen dem 1. und 2. Hauptnäherungsbruch der urspr. Entwicklung
$P_n\, Q_{n-1} - P_{n-1}\, Q_1 = -1$ sein, da an 1. Stelle ein Näherungswert steht, der $> \frac{2}{1}$ ist. Da aber die Indices für P und Q jetzt um 1 vorgerückt sind, wäre die Differenz $= (-1)^2 = +1$. Wir müssen daher, damit die Relation richtig bleibt, schreiben

$$P_n\, Q_{n-1} - P_{n-1}\, Q_n = (-1)^2 \cdot (-1).$$

Alle nachfolgenden Glieder liefern dieselben Hauptnäherungsbrüche wie vorher, da sie durch die Umformung nicht betroffen werden. Es muss daher zwischen diesen auch dieselbe Relation bestehen. Da aber bei allen der Index um 1 weitergerückt ist, müssen wir der Relation die Form geben:

$$P_n\, Q_{n-1} - P_{n-1}\, Q_n = (-1)^{n-1} \cdot (-1). \tag{16}$$

Wir haben also das Ergebnis: Durch den 1. Schritt der Umformung tritt eine Vermehrung der Glieder ein, es tritt ein negatives Glied auf. Die Relation muss dann die Form (16) haben.

Der nächste Schritt in der Umformung führt uns zu $1\,(q_1+1) - 1/2 - 1/1 + 1/(q_2-2)$. Zwischen den Hauptnäherungsbrüchen, die den 2 ersten Gliedern entsprechen, ändert sich die Relation nicht, da ein Näherungswert mit einem aus derselben Serie nachfolgenden in derselben Relation steht, wie mit dem letzten der vorhergehenden Serie. Für die übrigen Glieder, die von der Umformung betroffen werden, und für alle nachfolgenden gilt dieselbe Überlegung wie vorhin. Es treten jetzt 2 negative Glieder auf, und die Relation muss für alle Glieder, ausser dem ersten, lauten:

$$P_n\, Q_{n-1} - P_{n-1}\, Q_n = (-1)^{n-1} \cdot (-1)^2.$$

So können wir mit der Umformung weiterfahren und bei jedem Schritt dieselbe Überlegung anstellen. Wir kommen dann zu dem Ergebnis: *Für einen beliebigen Kettenbruch lautet die Relation:*

$$P_n\, Q_{n-1} - P_{n-1}\, Q_n = (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{\varkappa}, \tag{17}$$

wobei $\varkappa$ die Anzahl der negativen Glieder bis zu dem Glied $1/q_n$ einschliesslich bedeutet.

Bezeichnen wir den beliebigen Kettenbruch mit

$$1/q_1 + \varepsilon_2/q_2 + \varepsilon_3/q_3 + \cdots + \varepsilon_\varrho/q_\varrho\,, \qquad (\varepsilon_2 = \pm 1;\ \varepsilon_3 = \pm 1 \text{ etc.}) \tag{18}$$

so können wir die allgemeine Relation auch durch folgende Formel ausdrücken:

(19) $P_n\, Q_{n-1} - P_{n-1}\, Q_n = (\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_4 \cdot \cdots \varepsilon_n) \cdot (-1)^{n-1}$.

Es muss nur noch gezeigt werden, dass auch bei den Umformungen, die durch ein Glied mit dem Nenner 1 hervorgerufen werden, dieselbe Überlegung gilt. Für die Glieder, die einer solchen Umformung vorausgehen, und für die, welche von ihr betroffen werden, gilt dasselbe wie oben. Für alle nachfolgenden Glieder aber wird der Index um 1 erniedrigt, da die Anzahl der Glieder um 1 vermindert wird. Das hat aber genau denselben Einfluss, als ob der Index um 1 vermehrt würde.

IX.

Summe der Teilnenner einer Entwicklung.

Die positive Entwicklung eines echten Bruches liefert sämtliche Näherungswerte desselben, und zwar jeden nur einmal. Die Anzahl der Näherungswerte ist, wenn wir den Bruch selbst als letzten mitrechnen, gleich der Summe aller Teilnenner.

Wie wir in VII gesehen haben, liefern alle Kettenbrüche, die durch Umformung aus dem positiven entstehen, dieselben Näherungswerte, nur treten Wiederholungen auf. Wir müssen daher die Anzahl der Näherungswerte auch aus den Teilnennern eines beliebigen Kettenbruchs berechnen können. Bei jedem Schritt einer Umformung entsteht ein negatives Glied, und nach VII liefert der 1. Näherungswert einer Serie, die einem negativen Glied entspricht, eine Wiederholung. Wir können daher auch bei einer beliebigen Entwicklung die Anzahl der Näherungswerte bestimmen, indem wir alle Teilnenner addieren, dabei aber die Teilnenner, die zu einem negativen Gliede gehören, um 1 vermindern. Da alle Entwicklungen eines Bruches dieselben Näherungswerte liefern, können wir den Satz aufstellen:

Die Summe aller Teilnenner ist bei sämtlichen Entwicklungen konstant, wenn man die Teilnenner, die einem negativen Gliede angehören, um 1 *vermindert.*

Bezeichnen wir den beliebigen Kettenbruch wie in (18), so können wir diesen Satz durch folgende Formel ausdrücken:

$$\Sigma\left(q_\lambda - \frac{1-\varepsilon_\lambda}{2}\right) = \text{const.} \tag{20}$$

Diese konstante Summe ist gleich der Anzahl der Näherungswerte, wenn man den entwickelten Bruch selbst als letzten mitzählt.

X.

Weitere Beziehungen zwischen den Teilnennern.

Haben wir den echten Bruch $\frac{Z}{N}$ in einen positiven Kettenbruch entwickelt, dann sind alle Haupt- und Nebennäherungsbrüche, die den Teilnennern mit ungeradem Index entsprechen, $> \frac{Z}{N}$, diejenigen aber, die den Teilnennern mit geradem Index entsprechen, $< \frac{Z}{N}$. Wir erhalten also die Differenz der Anzahl der Näherungswerte, die $> \frac{Z}{N}$, und der Anzahl derer, die $< \frac{Z}{N}$ sind, wenn wir $\Sigma\, q_{2\lambda+1} - \Sigma\, q_{2\lambda}$ bilden. Dabei ist der letzte Teilnenner um 1 zu erniedrigen, weil er als letzten Näherungswert den Bruch $\frac{Z}{N}$ selbst liefert.

Da jede Umformung der positiven Entwicklung, abgesehen von Wiederholungen, dieselben Näherungswerte liefert, so müssen wir stets dieselbe Differenz erhalten. Es fragt sich nur, wie wir dieselbe bei der beliebigen Entwicklung (18) ausdrücken können. Das finden wir, wenn wir untersuchen, wie sich die Näherungswerte auf die den einzelnen Teilnennern entsprechenden Serien verteilen.

Wie wir in VII gesehen haben, hat jede Serie, die einem Glied von der Form $+ 1\,|\,q_\lambda -$ entspricht, einen Näherungswert der nachfolgenden Serie aufgenommen. Rechnen wir die Näherungswerte, die $> \frac{Z}{N}$ sind, als positiv, diejenigen die $< \frac{Z}{N}$ sind, als negativ, so hat der letzte Näherungswert der Serie, die q_λ entspricht, ein anderes Vorzeichen, als die vorhergehenden Näherungswerte dieser Serie. Er hebt sich also bei der Summierung aller Näherungswerte gegen einen vorhergehenden auf. Das Glied $+ 1\,|\,q_\lambda -$ liefert also zur

Summe nur noch $q_\lambda - 2$ Näherungswerte. Ein Glied $+ 1\ 2$ — liefert folglich keinen Beitrag zur Summe.

Aus VII ersehen wir ferner, dass jedes Glied mit negativem Vorzeichen als 1. Näherungswert seiner Serie eine Wiederholung hat. Ein Glied von der Form $-1\ q_\nu +$ liefert mithin als Beitrag zur Summe $q_\nu - 1$ Näherungswerte. Das Glied $-1\ 1 +$ liefert also z. B. keinen Beitrag. Haben wir ein Glied von der Form $-1\ q_\nu -$, so liefert dieses $q_\nu - 2 - 1$ Näherungswerte, da 2 Näherungswerte seiner Serie sich durch ihr entgegengesetztes Vorzeichen aufheben, und ein Näherungswert eine Wiederholung ist. Der Beitrag jedes Gliedes von den bis jetzt besprochenen Formen lässt sich durch $q_\lambda - \frac{3 - \varepsilon_\lambda - 2\,\varepsilon_{\lambda+1}}{2}$ ausdrücken. Eine Ausnahme macht das Glied $-1\ 2 -$. Es ist aus $-1\ 1 +$ entstanden, hat also eine Wiederholung und liefert als Beitrag noch einen Näherungswert.

Doch können wir auch für dieses Glied den Beitrag $2 - \frac{3 - \varepsilon_\lambda - 2\varepsilon_{\lambda+1}}{2} = -1$ gelten lassen, wenn wir bei der Festsetzung der Vorzeichen diesem Beitrag das richtige Vorzeichen geben.

Der Teilnenner des letzten Gliedes muss um 1, und wenn es negativ ist, um 2 erniedrigt werden. Obiger Ausdruck bestimmt daher auch den Beitrag des letzten Gliedes, da für dieses $\varepsilon_{\lambda+1} = 0$ ist.

Jedes Glied von der Form $+ 1\ q_\lambda +$ liefert als Beitrag q_λ Näherungswerte. Das lässt sich auch durch obigen Ausdruck angeben, da dann $\frac{3 - \varepsilon_\lambda - 2\,\varepsilon_{\lambda+1}}{2} = 0$ ist.

Für jedes Glied eines beliebigen Kettenbruchs gibt uns also der Ausdruck $a_\lambda - \frac{3 - \varepsilon_\lambda - 2\,\varepsilon_{\lambda+1}}{2}$ den Beitrag der Summe. Der aus jedem Teilnenner fliessende Beitrag muss nun das positive oder negative Zeichen erhalten, je nachdem die Näherungswerte grösser oder kleiner als $\frac{Z}{N}$ sind. Diese Forderung wird erfüllt, wenn wir jedem Beitrag das Zeichen $(-\varepsilon_2)(-\varepsilon_3)\cdots(-\varepsilon_\lambda)$ geben.

Es ist also zur Entwicklung eines echten Bruches die Summe

$$(21)\quad \Sigma\,(-\varepsilon_2)(-\varepsilon_3)\cdots(-\varepsilon_\lambda)\left\{q_\lambda - \frac{3 - \varepsilon_\lambda - 2\,\varepsilon_{\lambda+1}}{2}\right\}$$

konstant, und zwar gleich dem Überschuss der Näherungswerte, die $> \frac{Z}{N}$ sind, über die, welche $< \frac{Z}{N}$ sind.

XI.

Obere Grenze für die Anzahl der Glieder einiger Entwicklungen.

Wollen wir den echten Bruch $\frac{Z}{N}$ in einen positiven Kettenbruch entwickeln, so erhalten wir die Teilnenner, wenn wir N durch Z, Z durch den entstehenden Rest, diesen Rest durch den 2. Rest dividieren u. s. f. Das ist aber dasselbe Verfahren, wie wir es bei der Ermittelung des grössten gemeinschaftlichen Teilers der 2 Zahlen N und Z anwenden. Die 2 Zahlen N und Z sind prim zu einander: **ihr grösster gemeinschaftlicher Teiler ist also 1.**

Nach einem Satz von *Lamé* (Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 1844) ist die Anzahl der Divisionen, die man zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen ausführen muss, stets geringer als die fünffache Anzahl der Ziffern der kleineren Zahl. Ist die Anzahl der Ziffern von Z gleich n, so brauchen wir, um den grössten gemeinschaftlichen Teiler von N und Z zu erhalten, höchstens $5n-1$ Divisionen auszuführen. Bei der Bildung des Kettenbruchs müssen wir jedoch, um den letzten Teilnenner zu erhalten, noch den Divisor der letzten Division durch den letzten Rest 1 dividieren. Wir haben also höchstens $5n$ Divisionen auszuführen und erhalten so höchstens $5n$ Quotienten, die den Teilnenner des positiven Kettenbruchs geben. Daraus ergibt sich der Satz:

Die Anzahl der Glieder der positiven Entwicklung eines echten Bruches ist höchstens gleich der fünffachen Anzahl der Ziffern des Zählers.

Auch für die Anzahl der Glieder der Entwicklung nach grössten Resten lässt sich leicht eine obere Grenze bestimmen. Wir wollen zunächst untersuchen, wieviel Divisionen nach grösstem Reste wir auszuführen haben, um bei 2 Zahlen Z und N, $(N > Z)$, die prim zu einander sind, auf den grössten gemeinschaftlichen Teiler 1 zu kommen. Wir nehmen an, N sei gleich $z \cdot Z - 1$. Dann liefert die 1. Division den Rest $Z-1$, die 2. den Rest $Z-2$, die 3. den Rest $Z-3$, u. s. f., die $(Z-1)^{\text{te}}$ den Rest 1. Die Anzahl der Divisionen ist also um 1 kleiner als Z. Die Reihe der Reste durchläuft alle Zahlen von $Z-1$ bis 1. Andere Reste können aber bei den Divisionen zur Ermittlung des grössten gemeinschaftlichen Teilers

zwischen Z und einer beliebigen grösseren Zahl nicht vorkommen. Mithin haben wir die meisten Divisionen auszuführen, wenn $N = n \cdot Z \pm 1$ ist. Bei jedem andern Wert von N wird der 1. Rest kleiner als $Z - 1$, daher muss die Anzahl der Divisionen kleiner werden. Bei der Bestimmung der Quotienten des Kettenbruchs haben wir noch eine Division mehr auszuführen als bei der Ermittlung des grössten gemeinschaftlichen Teilers. Die Zahl der Quotienten ist also höchstens gleich der kleineren Zahl Z. Daraus folgt:

Die Anzahl der Glieder der Entwicklung eines echten Bruches nach grössten Resten ist höchstens gleich dem Zähler des Bruches.

Um auch für die Anzahl der Glieder der Entwicklung nach kleinsten Resten eine obere Grenze zu finden, stellen wir folgende Überlegung an. Nach den Ausführungen von *Lamé* kann die Anzahl der zur Ermittlung des grössten gemeinschaftlichen Teilers auszuführenden Divisionen dann und nur dann gleich der um 1 verminderten fünffachen Anzahl der Ziffern der kleineren Zahl sein, wenn alle Quotienten ausser dem ersten gleich 1 sind. Daraus folgt für die Kettenbruchentwicklung, dass die Anzahl der Glieder der positiven Entwicklung dann und nur dann gleich der fünffachen Anzahl der Ziffern des Zählers sein kann, wenn sämtliche Teilnenner, abgesehen vom ersten und letzten, gleich 1 sind. Der 1. Teilnenner kann eine beliebige Zahl, der letzte muss gleich 2 sein. Ist die Anzahl der Ziffern des Zählers gleich n, so hat in diesem besonderen Falle der positive Kettenbruch $5n$ Glieder, von denen die mittleren $5n - 2$ Glieder gleich 1 1 sind. Nun ist aber bei dem positiven Kettenbruch überall dort nach grösstem Reste entwickelt, wo der folgende Teilnenner gleich 1 ist. In I haben wir nachgewiesen, dass beim Übergang zur Entwicklung nach kleinsten Resten die Anzahl der Glieder eines Kettenbruchs, bei dem m Glieder mit dem Teilnenner 1 aufeinanderfolgen, um $\frac{m}{2}$, bezw. $\frac{m+1}{2}$ Glieder vermindert wird, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Folglich wird in unserem Falle die Anzahl der Glieder um $\frac{5n-2}{2}$, bezw. $\frac{5n-2+1}{2}$ vermindert, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es bleiben mithin nur noch $5n - \frac{5n-2}{2} = \frac{5n+2}{2}$, bezw. $5\,\mathrm{n} - \frac{5n-2+1}{2} = \frac{5n+1}{2}$ Glieder.

Aus den Ausführungen von *Lamé* ist ferner zu ersehen, dass stets dann, wenn bei der Ermittlung des grössten gemeinschaftlichen Teilers ausser dem ersten Quotienten noch ein weiterer Quotient vorkommt, der grösser als 1 ist, die Zahl der Divisionen mindestens

um 1 geringer ist als die um 1 verminderte fünffache Anzahl der Ziffern der kleineren Zahl. Kommen x Quotienten vor, die grösser als 1 sind, so ist die Anzahl der Divisionen höchstens $(5n - 1) - x$. Für die Bildung des positiven Kettenbruchs bedeutet das, dass die Anzahl der Glieder höchstens gleich der um x verminderten fünffachen Anzahl der Ziffern des Zählers sein kann, wenn, abgesehen vom ersten und letzten Gliede noch x Teilnenner > 1 vorkommen. Die übrigen $(5n - x) - 2 - x$ Teilnenner sind gleich 1. Beim Übergang zur Entwicklung nach kleinsten Resten bedingen die Teilnenner 1 eine Verminderung der Anzahl der Glieder. Die geringste Verminderung tritt dann ein, wenn die $5n - 2 - 2x$ Teilnenner 1 hintereinander stehen. Die Verminderung beträgt dann $\frac{5n-2-2x}{2}$, bezw. $\frac{5n-2-2x+1}{2}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Es bleiben mithin $5n - x - \frac{5n-2-2x}{2} = \frac{5n+2}{2}$, bezw. $5n - x - \frac{5n-2-2x+1}{2} = \frac{5n+1}{2}$ Glieder. Setzen wir $x = 0$, so umfasst dieser allgemeine Fall auch den vorhin behandelten besonderen Fall, wie auch die Übereintimmung der Resultate zeigt.

Wenn also n die Anzahl der Ziffern des Zählers eines echten Bruches bedeutet, so beträgt die Anzahl der Glieder der Entwicklung nach kleinsten Resten bei geradem n höchstens $\frac{5n+2}{2}$, *bei ungeradem n höchstens* $\frac{5n+1}{2}$.

Für $n = 1$ und $n = 2$ ist diese Anzahl gleich 3, bezw. 6, d. h. gleich der dreifachen Anzahl der Ziffern des Zählers; für grössere Werte von n ist sie kleiner als diese. Wir können daher auch sagen:

Die Anzahl der Glieder der Entwicklung eines echten Bruches nach kleinsten Resten ist höchstens gleich der dreifachen Anzahl der Ziffern des Zählers.

XII.

Weitere Entwicklungen eines echten Bruches.

Bei allen bis jetzt betrachteten Entwicklungen liessen wir nur Reste zu, die < 1 waren. Es wurde bei der Division stets die dem wahren Wert am nächsten kommende grössere oder kleinere Zahl zum Quotienten genommen. Nun können wir aber bei der Division auch solche Zahlen zu Quotienten wählen, die dem wahren Wert nicht benachbart sind, d. h. wir können Reste zulassen, die ≥ 1

sind. Dabei wollen wir aber nur solche Entwicklungen gelten lassen, die als Haupt- und Nebennäherungsbrüche keine andern Werte liefern als der positive Kettenbruch, d.h. keine andern, als die *Fareysche* Reihe für den betreffenden Bruch enthält. Es lässt sich nun zeigen, dass wir unter dieser Bedingung bei den Divisionen keine Zahl zum Quotienten nehmen dürfen, die grösser ist, als die dem wahren Wert benachbarte grössere Zahl, d. h. dass kein negativer Rest > 1 sein darf. Der Quotient darf nie grösser genommen werden als der, den die seitherige negative Entwicklung bei derselben Division erforderte. Ein jeder grösserer Quotient führt zu Näherungswerten, die nicht durch die positive Entwicklung geliefert werden.

Haben wir den positiven Kettenbruch

$$(22) \qquad 1/q_1 + 1/q_2 + \cdots + 1/q_\varkappa + 1/q_\lambda + 1/q_\mu + 1/q_\nu + \cdots + 1/q_n .$$

so wollen wir die den Teilnennern $q_\varkappa$, q_λ, q_μ, q_ν entsprechenden Hauptnäherungsbrüche mit $\frac{Z_\varkappa}{N_\varkappa}$, $\frac{Z_\lambda}{N_\lambda}$, $\frac{Z_\mu}{N_\mu}$, $\frac{Z_\nu}{N_\nu}$ bezeichnen.

Es sind dann alle, den Teilnennern q_μ und q_ν entsprechenden Näherungswerte folgende:

$$\frac{1\cdot Z_\lambda + Z_\varkappa}{1\cdot N_\lambda + N_\varkappa}, \quad \frac{2\cdot Z_\lambda + Z_\varkappa}{2\cdot N_\lambda + N_\varkappa}, \quad \cdots \quad \frac{q_\mu \cdot Z_\lambda + Z_\varkappa}{q_\mu \cdot N_\lambda + N_\varkappa} = \frac{Z_\mu}{N_\mu},$$

$$\frac{1\cdot Z_\mu + Z_\lambda}{1\cdot N_\mu + N_\lambda}, \quad \frac{2\cdot Z_\mu + Z_\lambda}{2\cdot N_\mu + N_\lambda}, \quad \cdots \quad \frac{q_\nu \cdot Z_\mu + Z_\lambda}{q_\nu \cdot N_\mu + N_\lambda} = \frac{Z_\nu}{N_\nu}.$$

Wenn wir nun bei der Division, die q_μ lieferte, den Quotienten $q_\mu + 1$ nehmen, so geht (22) nach II über in

$$(23) \qquad 1/q_1 + 1/q_2 + \cdots + 1/q_\varkappa + 1/q_\lambda + 1/(q_\mu + 1) - 1/1 + 1/(q_\nu - 1) + \cdots + 1/q_\mu .$$

Nach VII werden durch die Teilnenner $q_\mu + 1$, 1, $q_\nu - 1$ keine Näherungswerte geliefert, die nicht schon durch den positiven Kettenbruch bedingt sind. Jetzt wollen wir aber bei der Division, die den Quotienten $q_\mu + 1$ ergab, einen Quotienten nehmen, der um 1 grösser ist, also $q_\mu + 2$. Dem Teilnenner $q_\mu + 2$ entspricht dann als letzter Näherungsbruch der Wert

$$(24) \qquad \frac{(q_\mu + 2)\cdot Z_\lambda + Z_\varkappa}{(q_\mu + 2)\cdot N_\lambda + N_\varkappa}$$

Nun ist aber

$$\frac{(q_\mu + 2)\cdot Z_\lambda + Z_\varkappa}{(q_\mu + 2)\cdot N_\lambda + N_\varkappa} = \frac{q_\mu \cdot Z_\lambda + Z_\varkappa + 2\,Z_\lambda}{q_\mu \cdot N_\lambda + N_\varkappa + 2\,N_\lambda} = \frac{(Z_\mu + Z_\lambda) + Z_\lambda}{(N_\mu + N_\lambda) + N_\lambda}.$$

Der Zähler (Nenner) dieses Näherungswertes liegt zwischen den Zählern (Nennern) der 2 ersten Näherungsbrüche, die in der positiven Entwicklung durch den Teilnenner q_ν geliefert werden. Es sind dies die beiden Brüche

$$\frac{Z_\mu + Z_\lambda}{N_\mu + N_\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{2\cdot Z_\mu + Z_\lambda}{2\cdot N_\mu + N_\lambda}. \tag{25}$$

Der Näherungswert (24) müsste daher selbst zwischen diesen beiden Werten liegen, da in der Reihenfolge, wie die Näherungswerte durch den positiven Kettenbruch geliefert werden, Zähler und Nenner eines Bruches stets grösser oder gleich dem Zähler, bezw. Nenner, des vorhergehenden Bruches sein müssen. Da aber die Näherungswerte (25) durch die positive Entwicklung hintereinander geliefert werden, und zwischen ihnen kein anderer Näherungswert stehen kann, so ist der durch $q_\mu + 2$ gelieferte Wert ein solcher, den wir abweisen müssen. Es ist damit nachgewiesen, dass kein negativer Rest > 1 vorkommen kann. Auf das Glied — 1/1 kann daher nie ein negatives Glied folgen.

Es bleibt noch zu beweisen, dass auch kein negativer Rest $= 1$ vorkommen kann. Ein solcher könnte nur bei der letzten Division auftreten, wenn wir statt $\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n$ nehmen würden $\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = (q_n + 1) - \frac{r_n}{r_{n-1}}$, wobei $\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{1}{1}$. Nun liefert q_n den letzten Näherungswert des positiven Kettenbruchs, und zwar den entwickelten Bruch selbst.

Es ist

$$\frac{Z}{N} = \frac{q_n \cdot Z_{n-1} + Z_{n-2}}{q_n \cdot N_{n-1} + N_{n-2}}.$$

Der Teilnenner $q_n + 1$ würde aber als letzten Näherungswert

$$\frac{(q_n + 1)\cdot Z_{n-1} + Z_{n-2}}{(q_n + 1)\cdot N_{n-1} + N_{n-2}}$$

liefern. Zähler und Nenner dieses Bruches sind aber grösser als Zähler und Nenner von $\frac{Z}{N}$. In der *Fareyschen* Reihe für $\frac{Z}{N}$ kann

aber kein Bruch einen grösseren Zähler, bezw. Nenner, als $\frac{Z}{N}$ haben. Wir müssen daher den Näherungswert, den $q_n + 1$ liefert, abweisen, d. h. wir dürfen auch keinen negativen Rest zulassen, der gleich 1 ist.

Dagegen dürfen wir stets positive Reste zulassen, die $\leqq 1$ sind, d. h. wir dürfen bei jeder Division zum Quotienten alle ganzen Zahlen nehmen, die kleiner sind als die dem wahren Wert benachbarte kleinere ganze Zahl. Es treten dadurch keine neuen Näherungswerte, sondern nur Wiederholungen auf. Wir wollen nun untersuchen, wie wir den positiven Kettenbruch nach dieser Richtung hin umgestalten können.

Ist der positive Kettenbruch

$$1/q_1 + 1/q_2 + \cdots + 1/q_\lambda + 1/q_{\lambda+1} + \cdots + 1/q_n \qquad (q_\lambda > 1) \tag{26}$$

gegeben, so ist nach (1) der Quotient q_λ entstanden durch Division der beiden Reste $r_{\lambda-2}$ und $r_{\lambda-1}$. Nach (1) ist nämlich

$$\frac{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} = q_\lambda + \frac{r_\lambda}{r_{\lambda-1}}, \quad \frac{r_{\lambda-1}}{r_\lambda} = q_{\lambda+1} + \frac{r_{\lambda+1}}{r_\lambda},$$

$$\frac{r_\lambda}{r_{\lambda+1}} = q_{\lambda+2} + \frac{r_{\lambda+2}}{r_{\lambda+1}}.$$

Nun wollen wir statt q_λ den Quotienten $q_\lambda - 1$ nehmen. Wir erhalten dann:

$$\frac{r_{\lambda-2}}{r_{\lambda-1}} = (q_\lambda - 1) + \frac{r'}{r_{\lambda-1}}.$$

Dabei ist

$$\frac{r'}{r_{\lambda-1}} = 1 + \frac{r_\lambda}{r_{\lambda-1}} = \frac{r_{\lambda-1} + r_\lambda}{r_{\lambda-1}}.$$

Die nächste Division $\frac{r_{\lambda-1}}{r'} = \frac{r_{\lambda-1}}{r_{\lambda-1} + r_\lambda}$ ergibt daher den Quotienten 1 und einen negativen Rest.

$$\frac{r_{\lambda-1}}{r_{\lambda-1} + r_\lambda} = 1 - \frac{r_{\lambda-1} + r_\lambda - r_{\lambda-1}}{r_{\lambda-1} + r_\lambda} = 1 - \frac{r_\lambda}{r_{\lambda-1} + r_\lambda}.$$

Bei der nächsten Division erhalten wir

$$\frac{r_{\lambda-1} + r_\lambda}{r_\lambda} = \frac{r_{\lambda-1}}{r_\lambda} + 1 = (q_{\lambda+1} + 1) + \frac{r_{\lambda+1}}{r_\lambda}.$$

Die folgende Division $\frac{r_\lambda}{r_{\lambda+1}}$ ist dieselbe, die wir bei der Bildung der positiven Entwicklung haben. Von hier aus geht also die Entwicklung wie bei dieser weiter. (26) geht mithin über in

$$(27)\quad 1/q_1 + 1/q_2 + \cdots + 1/(q_\lambda - 1) + 1/1 - 1/(q_{\lambda+1}+1) + 1/q_{\lambda+2} + \cdots + 1/q_n.$$

Ist $(q_\lambda - 1)$ noch grösser als 1, so können wir diesen Quotienten wieder um 1 erniedrigen. Wir erhalten auf dieselbe Weise

$$(28)\quad 1\,q_1 + 1\,q_2 + \cdots + 1\,(q_\lambda - 2) + 1/1 - 1/2 - 1/(q_{\lambda+1}+1) + 1/q_{\lambda+2} + \cdots + 1/q_n \text{ oder}$$

$$1\,q_1 + 1\,q_2 + \cdots + 1\,(q_\lambda - 2) + 1/1 - 1/1 + 1/1 + 1/q_{\lambda+1} + 1/q_{\lambda+2} + \cdots + 1/q_n.$$

Beide Formen sind nach I oder IV gleichwertig.

Auf die gleiche Art können wir fortfahren und den Quotienten q_λ bis auf 1 erniedrigen.

Wenn wir also einen Quotienten q_λ, auf den ein positiver Rest folgt, um 1 erniedrigen, so muss hinter dem Gliede $1/(q_\lambda - 1)$ das Glied $-1\,1$ eingeschoben werden. Der Quotient $q_{\lambda+1}$ wird um 1 erhöht, das Glied $1/(q_{\lambda+1}+1)$ bekommt das negative Vorzeichen.

Diese neuen Umformungen können wir an allen Gliedern des positiven Kettenbruchs, deren Teilnenner > 1 ist, vornehmen. Wenn wir die einzelnen Fassungen der verschiedenen Glieder mit einander und mit den früher besprochenen Umformungen kombinieren, erhalten wir eine Reihe neuer Entwicklungen.

XIII.

Entwicklungen eines Bruches von der Form $\frac{1}{n}$.

Die Brüche von der Form $\frac{1}{n}$ hatte unter den früheren Bedingungen nur eine Entwicklung. Unter den jetzigen Bedingungen können wir auch für sie mehrere Entwicklungen angeben, deren Anzahl wir nun feststellen wollen.

$\frac{1}{2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{1}\right)}$. Die Division 2 : 1 kann auf 2 Arten ausgeführt werden:

1.) $2 : 1 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{2} = 1/2$

2.) $2 : 1 = 1 + \frac{1}{1}$; $1 : 1 = 1 \ldots \frac{1}{2} = 1/1 + 1/1$

Für den Bruch $\frac{1}{2}$ erhalten wir also 2 Entwicklungen

$\frac{1}{3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{1}\right)}$. Die Division 3 : 1 kann auf 3 Arten ausgeführt werden:

1.) $3 : 1 = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{3} = 1/3$

2.) $3 : 1 = 2 + \frac{1}{1}$; $1 : 1 = 1 \ldots \frac{1}{3} = 1/2 + 1/1$

3.) $3 : 1 = 1 + \frac{2}{1}$; $1 : 2 = 1 - \frac{1}{2}$;

2 : 1 kann, wie wir oben gesehen haben, auf 2 Arten weiter geführt werden:

a.) $2 : 1 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{3} = 1/1 + 1/1 - 1/2$

b.) $2 : 1 = 1 + \frac{1}{1}$; $1 : 1 = 1 \ldots \frac{1}{3} = 1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/1$

Der Bruch $\frac{1}{3}$ hat also $4 = 2^2$ Entwicklungen.

Für die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ist, wie wir sehen, die Anzahl der Entwicklungen gleich einer Potenz von 2, deren Exponent um 1 kleiner ist als der Nenner des Bruches. Durch den Schluss von n auf $n + 1$ können wir zeigen, dass das für jeden Bruch von der Form $\frac{1}{n}$ gilt.

Wir nehmen an, die Richtigkeit unseres Satzes sei für die Brüche mit den Nennern n, $n - 1$, $n - 2$, ... 2 bewiesen. Haben wir nun den Bruch $\frac{1}{n+1}$, so suchen wir auf die bekannte Art die Quotienten, welche die Teilnenner der verschiedenen Entwicklungen geben.

$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{\binom{n+1}{1}}$ Wir erhalten durch die links stehende Art der Division:

$(n+1):1 = n+1$ . . . . . 1 Entw.

$(n+1):1 = n - \frac{1}{1}$; $1:1 = 1$ . . . . . 1 „

$(n+1):1 = (n-1) + \frac{2}{1}$; $1:2 = 1 - \underline{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}$ lässt sich aber auf 2 Arten ausdrücken 2^1 „

$(n+1):1 = (n-2) + \frac{3}{1}$; $1:3 = 1 - \underline{\frac{2}{3}}$;

$3:2 = 1 + \underline{\frac{1}{2}} = 2 - \underline{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}$ lässt sich in beiden Fällen auf 2 Arten ausdrücken . . . . . 2^2 „

$(n+1):1 = (n-3) + \frac{4}{1}$; $1:4 = 1 - \frac{3}{4}$;

$4:3 = 1 + \underline{\frac{1}{3}}$

$= 2 - \frac{2}{3}$; $3:2 = 1 + \underline{\frac{1}{2}} = 2 - \underline{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{3}$ lässt sich auf 4, $\frac{1}{2}$ jedesmal auf 2 Arten ausdrücken . . . 2^3 „

. . . . . .

. . . . . .

$(n+1):1 = 2 + \frac{n-1}{1}$

$1:(n-1)$ lässt sich auf 2^{n-2} Arten weiterführen . . . . . 2^{n-2} „

$(n+1):1 = 1 + \frac{n}{1}$

$1:n$ lässt sich auf 2^{n-1} Arten weiterführen . 2^{n-1} „

Zusammen erhalten wir also für den Bruch $\frac{1}{n+1}$

$1 + 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n$ Entwicklungen.

Es gilt daher allgemein der Satz: *Jeder Bruch von der Form* $\frac{1}{n}$ *hat* 2^{n-1} *Entwicklungen.*

XIV.

Anzahl der Entwicklungen eines beliebigen echten Bruches unter den neuen Bedingungen.

Um die Anzahl der Entwicklungen eines beliebigen echten Bruches zu bestimmen, zeigen wir wieder wie früher, wieviel Umformungen man mit dem positiven Kettenbruch vornehmen kann.

Wir betrachten zunächst die zweigliedrige Entwicklung $1/q_1 + 1/q_2$.

Das 1. Glied $1/q_1$ lässt, wie wir in XIII gesehen haben, 2^{q_1-1} Entwicklungen zu. Zu jeder dieser Formen von $1/q_1$ tritt nun das 2. Glied $1/q_2$ hinzu, und zwar tritt es unter Berücksichtigung von (27) und (28) zu der einen Hälfte dieser Formen als $+ 1/q_2$, zu der andern aber als $- 1/(q_2 + 1)$.

Zu jeder Form der letzteren Hälfte kann nun das Glied $1/(q_2 + 1)$ in 2^{q_2} verschiedenen Fassungen zugefügt werden. Diese Hälfte gibt also Anlass zu $\frac{2^{q_1-1}}{2} \cdot 2^{q_2}$ Entwicklungen.

Ebenso kann zu jeder Form der ersten Hälfte das Glied $1/q_2$ in 2^{q_2-1} verschiedenen Gestalten treten. Dadurch erhalten wir $\frac{2^{q_1-1}}{2} \cdot 2^{q_2-1}$ verschiedene Entwicklungen. Diese Hälfte liefert aber noch weitere Umformungen. Bei allen Formen von $1/q_1$, denen wir das Glied $1/q_2$ als solches zugefügt haben, können wir statt dessen auch den Teilnenner des letzten Gliedes um 1 vermehren und der Reihe nach eine der folgenden Fassungen hinzusetzen:

$$
\begin{aligned}
&- 1/1 + 1/(q_2 - 1),\\
&- 1/2 - 1/1 + 1/(q_2 - 2),\\
&- 1/2 - 1/2 - 1/1 + 1/(q_2 - 3),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&- 1/2 - 1/2 - \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot - 1/1 + 1/2,\\
&- 1\,2 - 1/2 - \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot - 1\,2 - 1/2.
\end{aligned}
$$

Die letzten Glieder dieser Fassungen lassen wieder 2^{q_2-2}, bezw. 2^{q_2-3}, 2^{q_2-4}, $\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot 2^2$, 2^1, 2^1 Umwandlungen zu. Wir erhalten so für die 1. Hälfte noch

$\frac{2^{q_1-1}}{2} \cdot (2^{q_2-2} + 2^{q_2-3} + 2^{q_2-4} + \ldots + 2^2 + 2^1 + 2^1) = \frac{2^{q_1-1}}{2} \cdot 2^{q_2-1}$

neue Entwicklungen. Vorhin hatten wir für diese Hälfte schon dieselbe Anzahl von Entwicklungen. Sie liefert daher zusammen $\frac{2^{q_1-1}}{2} \cdot 2^{q_2}$ Entwicklungen, also ebensoviel wie die 2. Hälfte.

Folglich erhalten wir für den Kettenbruch $1/q_1 + 1/q_2$ zusammen $\frac{2^{q_1-1}}{2} \cdot (2^{q_2} + 2^{q_2}) = 2^{q_1+q_2-1}$ verschiedene Umformungen.

Die Anzahl der Entwicklungen eines echten Bruches, der durch einen zweigliedrigen pos. Kettenbruch dargestellt werden kann, ist also gleich der Potenz von 2, deren Exponent die um 1 verminderte Summe der Teilnenner dieses Kettenbruchs ist.

Beispiel: $\frac{4}{13} = 1/3 + 1/4$

1/3 kann in $2^2 = 4$ verschiedenen Gestalten auftreten.

(a) 1/3	(b) 1/1 + 1/1 — 1/2
(b) 1/2 + 1/1	(a) 1/1 + 1/1 — 1/1 + 1/1

Zu den Formen (a) tritt nun das 2. Glied als + 1/4, zu den Formen (b) als — 1/5.

(a) 1/3 + 1/4	(b) 1/2 + 1/1 — 1/5
(a) 1/1 + 1/1 — 1/1 + 1/1 + 1/4	(b) 1/1 + 1/1 — 1/5

1/4 und 1/5 können dabei in folgenden 2^3 bezw. 2^4 Fassungen zugefügt werden:

	— 1/5
	1/4+1/1
	1/3+1/1—1/2
	1/3+1/1—1/1+1/1
+ 1/4	1/2+1/1—1/1+1/2
1/3+1/1	1/2+1/1—1/1+1/1+1/1
1/2+1/1—1/2	1/2+1/1—1/2—1/2
1/2+1/1—1/1+1/1	1/2+1/1—1/2—1/1+1/1
1/1+1/1—1/1+1/2	1/1+1/1—1/1+1/3
1/1+1/1—1/1+1/1+1/1	1/1+1/1—1/1+1/2+1/1
1/1+1/1—1/2—1/2	1/1+1/1—1/1+1/1+1/1—1/2
1/1+1/1—1/2—1/1+1/1	1/1+1/1—1/1+1/1+1/1—1/1+1/1
	1/1+1/1—1/2—1/1+1/2
	1/1+1/1—1/2—1/1+1/1+1/1
	1/1+1/1—1/2—1/2—1/2
	1/1+1/1—1/2—1/2—1/1+1/1

Die Formen (a) geben also zu $2 \cdot 2^3 = 16$, die Formen (b) zu $2 \cdot 2^4 = 32$ Entwicklungen Anlass. In den Formen (a), die das Glied 1/4 in seiner ursprünglichen Gestalt annehmen, kann man nun den Nenner des letzten Gliedes um 1 erhöhen und statt 1/4 eine der Formen $-1/1+1/3$, $-1/2-1/1+1/2$, $-1/2-1/2-1/2$ zufügen. Die letzten Glieder 1/3 und 1/2 lassen wir wieder alle Gestalten annehmen.

$1/4-1/1+1/3$	$1/1+1/1-1/1+1/2-1/1+1/3$
$-1/1+1/2+1/1$	$-1/1+1/2+1/1$
$-1/1+1/1+1/1-1/2$	$-1/1+1/1+1/1-1/2$
$-1/1+1/1+1/1-1/1+1/1$	$-1/1+1/1+1/1-1/1+1/1$
$-1/2-1/1+1/2$	$-1/2-1/1+1/2$
$-1/2-1/1+1/1+1/1$	$-1/2-1/1+1/1+1/1$
$-1/2-1/2-1/2$	$-1/2-1/2-1/2$
$-1/2-1/2-1/1+1/1$	$-1/2-1/2-1/1+1/1$

Das sind 16 neue Entwicklungen; also liefern die Formen (a) zusammen auch 32 Entwicklungen. Wir haben daher im ganzen $64 = 2^{(3+4)-1}$ Entwicklungen.

Nun gehen wir zu dem dreigliedrigen positiven Kettenbruch $1/q_1 + 1/q_2 + 1/q_3$ über. Die beiden ersten Glieder lassen, wie wir gezeigt haben, $2^{q_1+q_2-1}$ Umformungen zu. Zu jeder dieser Formen der beiden ersten Glieder tritt nun das 3. Glied hinzu, und zwar zu der einen Hälfte als $+ 1/q_3$, zu der andern aber als $- 1/(q_3+1)$.

Zu jeder Form der letzteren Hälfte kann aber das Glied $1/(q_3+1)$ in 2^{q_3} verschiedenen Gestalten zugefügt werden. Es entstehen dadurch $\frac{2^{q_1+q_2-1}}{2} \cdot 2^{q_3}$ Entwicklungen.

Ebenso kann zu jeder Form der 2. Hälfte das Glied $1/q_3$ in 2^{q_3-1} verschiedenen Fassungen hinzutreten. Dadurch kommen wir zu $\frac{2^{q_1+q_2-1}}{2} \cdot 2^{q_3-1}$ Entwicklungen. Diese Hälfte lässt aber noch andere Umformungen zu. Bei allen Formen, die das Glied $1/q_3$ in seiner ursprünglichen Gestalt zu sich nehmen, kann ich den Teil-

nenner des letzten Gliedes um 1 erhöhen und statt $1/q_3$ der Reihe nach eine der folgenden Formen zufügen:

$$
\begin{aligned}
&- 1/1 + 1(q_3 - 1),\\
&- 1/2 - 1/1 + 1(q_3 - 2),\\
&- 1/2 - 1/2 - 1/1 + 1(q_3 - 3),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&- 1/2 - 1/2 - \cdots - 1/1 + 1/2,\\
&- 1/2 - 1/2 - \cdots - 1/2 - 1/2.
\end{aligned}
$$

Die letzten Glieder dieser Formen lassen wieder 2^{q_3-2}, 2^{q_3-3}, 2^{q_3-4}, ... 2^2, 2^1, 2^1 Fassungen zu. Wir erhalten dadurch für die 1. Hälfte noch

$$\frac{2^{q_1+q_2-1}}{2}(2^{q_3-2}+2^{q_3-3}+2^{q_3-4}+\cdots+2^2+2^1+2^1) = \frac{2^{q_1+q_2-1}}{2}\cdot 2^{q_3-1}$$

neue Entwicklungen. Sie liefert also zusammen $\frac{2^{q_1+q_2-1}}{2}\cdot 2^{q_3}$ Entwicklungen, mithin ebensoviel als die 2. Hälfte. Es ergeben sich folglich im ganzen $\frac{2^{q_1+q_2-1}}{2}(2^{q_3}+2^{q_3}) = 2^{q_1+q_2+q_3-1}$ Entwicklungen. Die Anzahl der Entwicklungen eines echten Bruches, der sich als dreigliedriger positiver Kettenbruch darstellen lässt, ist also gleich der Potenz von 2, die zum Exponenten die um 1 verminderte Summe der Teilnenner dieses Kettenbruchs hat.

Beispiel: $\frac{13}{30} = 1/2 + 1/3 + 1/4.$

Wir bilden zuerst alle Formen von $1/2 + 1/3$ und fügen $+ 1/4$, bezw. $- 1/5$ hinzu.

(a) $1/2 + 1/3 + 1/4$
(b) $1/2 + 1/2 + 1/1 - 1/5$
(b) $1/2 + 1/1 + 1/1 - 1/2 - 1/5$
(a) $1/2 + 1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/1 + 1/4$

(a) $1/3 - 1/1 + 1/2 + 1/4$
(b) $1/3 - 1/1 + 1/1 + 1/1 - 1/5$

(b) $1/3 - 1/2 - 1/2 - 1/5$
(a) $1/3 - 1/2 - 1/1 + 1/1 + 1/4$

(a) $1/1 + 1/1 - 1/4 + 1/4$
(b) $1/1 + 1/1 - 1/3 + 1/1 - 1/5$
(b) $1/1 + 1/1 - 1/2 + 1/1 - 1/2 - 1/5$
(a) $1/1 + 1/1 - 1/2 + 1/1 - 1/1 + 1/1 + 1/4$
(a) $1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/2 + 1/4$
(b) $1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/1 + 1/1 - 1/5$
(b) $1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/1 - 1/2 - 1/2 - 1/5$
(a) $1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/1 - 1/2 - 1/1 + 1/1 + 1/4$

$1/2 + 1/3$ gibt $2^{2+3-1} = 16$ verschiedene Formen. Zu den 8 Formen (a) tritt das Glied $+ 1/4$, zu den 8 Formen (b) das Glied $- 1/5$. $1/4$ kann aber jedesmal in 8-, $1/5$ in 16-facher Gestalt zugefügt werden. (Siehe voriges Beispiel!) Die 8 Formen (a) geben daher Anlass zu $8 \cdot 8$, die 8 Formen (b) zu $8 \cdot 16$ Entwicklungen.

Bei den 8 Formen (a), die das 3. Glied in der Form $1/4$ haben, vermehren wir nun den letzten Teilnenner der betreffenden Form von $1/2 + 1/3$ um 1.

$1/2 + 1/\underline{4}$
$1/2 + 1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/\underline{2}$
$1/3 - 1/1 + 1/\underline{3}$
$1/3 - 1/2 - 1/1 + 1/\underline{2}$

$1/1 + 1/1 - 1/\underline{5}$
$1/1 + 1/1 - 1/2 + 1/1 - 1/1 + 1/\underline{2}$
$1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/\underline{3}$
$1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/1 - 1/2 - 1/1 + 1/\underline{2}$

Zu jeder dieser 8 Formen können nun an Stelle von $+ 1/4$ der Reihe nach eine der folgenden 8 Formen treten:

$- 1/1 + 1/3$
$- 1/1 + 1/2 + 1/1$
$- 1/1 + 1/1 + 1/1 - 1/2$
$- 1/1 + 1/1 + 1/1 - 1/1 + 1/1$

$- 1/2 - 1/1 + 1/2$
$- 1/2 - 1/1 + 1/1 + 1/1$
$- 1/2 - 1/2 - 1/2$
$- 1/2 - 1/2 - 1/1 + 1/1$

Es entstehen dadurch noch $8 \cdot 8$ Entwicklungen. Die Formen (a) geben also zusammen zu $8 \cdot 16$ Entwicklungen Anlass, die Formen (b) liefern ebensoviel.

Wir erhalten daher zusammen $8 \cdot 16 + 8 \cdot 16 = 256$ Entwicklungen. 256 ist aber gleich $2^{(2+3+4)-1}$.

Nachdem wir für den 2- und den 3-gliedrigen positiven Kettenbruch nachgewiesen haben, dass die Anzahl der Umformungen gleich einer Potenz von 2 ist, deren Exponent die um 1 verminderte

Summe der Teilnenner ist, lässt sich durch den Schluss von n auf $n + 1$ leicht zeigen, dass das für jeden positiven Kettenbruch mit beliebiger Gliederanzahl gilt. Wir nehmen an, für positive Entwicklungen mit 2, 3, · · · · $n - 1$, n Gliedern sei der Satz bewiesen. Dann betrachten wir den Kettenbruch

$$1/q_1 + 1/q_2 + \cdots + 1/q_n + 1/q_{n+1}.$$

Der Kettenbruch, den die ersten Glieder bilden, lässt sich auf $2^{\left(\sum_1^n q_\lambda\right) - 1}$-fache Art darstellen. Zu jeder dieser Formen, in der die n Glieder erscheinen können, tritt nun das $(n + 1)^{\text{te}}$ Glied hinzu, und zwar zu der einen Hälfte, die wir die Formen (a) nennen wollen, als $+ 1/q_{n+1}$, zu der andern Hälfte, die wir als Formen (b) bezeichnen, als $- 1/(q_{n+1} + 1)$.

Da das Glied $1/(q_{n+1} + 1)$ aber in 2^{q_n+1}-facher, das Glied $1/q_{n+1}$ in 2^{q_n+1-1}-facher Gestalt zugefügt werden kann, so liefern

die Formen (b) $\frac{1}{2} \cdot 2^{\left(\sum_1^n q_\lambda\right) - 1} \cdot 2^{q_n+1}$,

die Formen (a) $\frac{1}{2} \cdot 2^{\left(\sum_1^n q_\lambda\right) - 1} \cdot 2^{q_n+1-1}$ Entwicklungen.

Die Formen (a) geben aber noch zu weiteren Entwicklungen Anlass. Überall, wo wir $1/q_{n+1}$ in seiner ursprünglichen Gestalt zugefügt haben, können wir den letzten Teilnenner der Form (a) um 1 erhöhen und statt $1/q_{n+1}$ der Reihe nach eine der folgenden Formen hinzufügen:

$$\begin{aligned}
&- 1/1 + 1/(q_{n+1} - 1),\\
&- 1/2 - 1/1 + 1/(q_{n+1} - 2),\\
&- 1/2 - 1/2 - 1/1 + 1/(q_{n+1} - 3),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&- 1/2 - 1/2 - \cdots - 1/1 + 1/2,\\
&- 1/2 - 1/2 - \cdots - 1/2 - 1/2.
\end{aligned}$$

Die letzten Glieder dieser Formen können wir wieder in 2^{q_n+1-2}, bezw. 2^{q_n+1-3}, 2^{q_n+1-4}, · · · · 2^2, 2^1, 2^1 verschiedene Gestalten darstellen.

Dadurch kommen wir zu

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{\left(\sum_1^n q_\lambda\right)-1} \cdot (2^{q_{n+1}-2} + 2^{q_{n+1}-3} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^1)$$

$$= \frac{1}{2} 2^{\left(\sum_1^n q_\lambda\right)-1} \cdot 2^{q_{n+1}-1}$$

neuen Entwicklungen. Die Formen (a) verursachen daher zusammen

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{\left(\sum_1^n q_\lambda\right)-1} \cdot 2^{q_{n+1}}$$

Entwicklungen, also ebensoviel wie die Formen (b).

Die Gesamtzahl der Umformungen für einen positiven Kettenbruch mit $n+1$ Gliedern ist mithin gleich

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{\left(\sum_1^n q_\lambda\right)-1} \cdot \left(2^{q_{n+1}} + 2^{q_{n+1}}\right) = 2^{\left(\sum_1^{n+1} q_\lambda\right)-1}.$$

Wir können daher allgemein den Satz aufstellen:

Die Anzahl der Entwicklungen eines echten Bruches ist gleich einer Potenz von 2, *welche zum Exponenten die um* 1 *verminderte Summe der Teilnenner der positiven Entwicklung dieses Bruches hat*

Ein Bruch $\frac{a}{b}$, der $< \frac{1}{2}$ ist, sei in den positiven Kettenbruch $1/q_1 + 1/q_2 + \cdots + 1/q_n$ entwickelt. Der Bruch, der $\frac{a}{b}$ zur Einheit ergänzt, ist $\frac{b-a}{b}$. Wir wollen den positiven Kettenbruch für $\frac{b-a}{b}$ bilden.

Die ersten Teilnenner der Entwicklung für $\frac{a}{b}$ sind durch folgende Divisionen entstanden:

$$b : a = q_1 + \frac{r_1}{a};$$

$$a : r_1 = q_2 + \frac{r_2}{r_1};$$

$$\frac{r_2}{r_1} = 1/q_3 + 1/q_4 + \cdots + 1/q_n .$$

Um die Teilnenner des Kettenbruchs für $\frac{b-a}{b}$ zu finden, führen wir folgende Divisionen aus:

$$\frac{b-a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{b-a}};$$

$$\frac{b}{b-a} = 1 + \frac{a}{b-a};$$

$$\frac{b-a}{a} = \frac{b}{a} - 1 = (q_1 - 1) + \frac{r_1}{a};$$

$$\frac{a}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1}.$$

Von hier aus geht also die Entwicklung in gleicher Weise wie diejenige für $\frac{a}{b}$ weiter. Es ist daher

$$\frac{b-a}{b} = 1/1 + 1/(q_1 - 1) + 1/q_2 + \cdots + 1/q_n.$$

Zwei Brüche, die sich zu 1 ergänzen, haben also ähnliche positive Entwicklungen. Beginnt die Entwicklung des Bruches, der $< \frac{1}{2}$ ist, mit $1/q_1$, so beginnt diejenige des andern Bruches mit $1/1 + 1/(q_1 - 1)$. Alle übrigen Glieder sind in beiden Entwicklungen gleich. Daraus folgt der Satz:

Die Summe der Teilnenner der positiven Entwicklung eines echten Bruches ist gleich der Summe der Teilnenner der positiven Entwicklung des Bruches, der ihn zur Einheit ergänzt.

Es ergibt sich daraus direkt folgender Satz:

Für 2 echte Brüche, die sich zur Einheit ergänzen, ist die Anzahl der Entwicklungen dieselbe.

Lassen wir für einen echten Bruch auch solche Entwicklungen zu, die mit $1 -$ beginnen, so stellt sich $\frac{a}{b}$ dar als $1 - \frac{b-a}{b}$, wobei $\frac{b-a}{b}$ ebensoviel Entwicklungen haben kann als $\frac{a}{b}$. Wir erhalten daher den Satz:

Die Anzahl aller Entwicklungen eines echten Bruches, die keine andern Näherungswerte liefern, als die Fareysche Reihe

für den betreffenden Bruch enthält, ist gleich einer Potenz von 2, welche zum Exponenten die Summe aller Teilnenner der positiven Entwicklung des Bruches hat.

XV.

Anzahl der Brüche, für die Σq_λ denselben Wert hat.

Da die Anzahl der Entwicklungen eines echten Bruches nur von der Summe der Teilnenner des positiven Kettenbruchs abhängt, so haben alle Brüche, deren positive Entwicklung dieselbe Summe der Teilnenner aufweist, auch die gleiche Anzahl von Entwicklungen. Wir wollen nun feststellen, wieviel Brüche es gibt, für die Σq_λ denselben Wert hat.

Nur für den einen Bruch $\frac{1}{2}$ ist die Summe der Teilnenner gleich 2.

Für 2 Brüche ist $\Sigma q_\lambda = 3$, nämlich für $\frac{1}{3}$ und für $\frac{2}{3} = 1/1 + 1/2$.

Soll $\Sigma q_\lambda = 4$ sein, so können wir 4 Entwicklungen angeben: $\frac{1}{4} = 1/4$, $\frac{3}{4} = 1/1 + 1/3$, $\frac{3}{5} = 1/1 + 1/1 + 1/2$, $\frac{2}{5} = 1/2 + 1/2$.

Soll also $\Sigma q_\lambda = 2$, bezw. 3, 4 sein, so können wir $1 = 2^{2-2}$, bezw. $2 = 2^{3-2}$, $4 = 2^{4-2}$ Brüche angeben, für welche die Summe der Teilnenner dieselbe ist. Durch den Schluss von n auf $n + 1$ können wir nun allgemein beweisen, dass es stets 2^{s-2} Brüche gibt, für die $\Sigma q_\lambda = s$ ist.

Wir nehmen an, für $s = n$, $n - 1$, $n - 2$, ... 2 sei die Richtigkeit dieses Satzes bewiesen. Soll nun $s = n + 1$ sein, so können wir zunächst folgende positive Entwicklungen angeben, für die $\Sigma q_\lambda = n + 1$ ist:

$$1/(n+1)$$
$$1/(n+1-2)+1/2$$
$$1/(n+1-3)+1/3$$
$$1/(n+1-4)+1/4$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$1/1+1/n.$$

Alle diese Entwicklungen, ausser der ersten, sind von der Form $1/(n+1-\varkappa)+1/\varkappa$. Der Beitrag, den das 2. Glied $1/\varkappa$ zur Summe der Teilnenner liefert, kann aber auch durch andere Gliedergruppen

geliefert werden, und zwar nach unserer Annahme jedesmal durch 2^{x-2} Gruppen. Diese können wir der Reihe nach mit $1/(n+1-x)$ verbinden. Wir erhalten daher, wenn wir $1\ (n+1)$ hinzunehmen, $1+2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-2}=2^{n-1}=2^{(n+1)-2}$ positive Entwicklungen, für welche die Summe der Teilnenner gleich $n+1$ ist.

Es gilt daher allgemein der Satz:

Die Anzahl der echten Brüche, für welche die Summe der Teilnenner der positiven Entwicklung gleich s ist, beträgt 2^{s-2}.

Alle diese 2^{s-2} *Brüche haben dieselbe Anzahl von Entwicklungen, nämlich* 2^s.

Als Beispiel wollen wir die 2^4 Brüche angeben, für welche die Summe der Teilnenner der positiven Entwicklung gleich 6 ist.

$$\frac{1}{6}=1/6 \qquad \frac{5}{6}=1/1+1/5$$

$$\frac{2}{9}=1/4+1/2 \qquad \frac{7}{9}=1/1+1/3+1/2$$

$$\frac{3}{10}=1/3+1/3 \qquad \frac{7}{10}=1/1+1/2+1/3$$

$$\frac{3}{11}=1/3+1/1+1/2 \qquad \frac{8}{11}=1/1+1/2+1/1+1/2$$

$$\frac{4}{9}=1/2+1/4 \qquad \frac{5}{9}=1/1+1/1+1/4$$

$$\frac{5}{12}=1/2+1/2+1/2 \qquad \frac{7}{12}=1/1+1/1+1/2+1/2$$

$$\frac{4}{11}=1/2+1/1+1/3 \qquad \frac{7}{11}=1/1+1/1+1/1+1/3$$

$$\frac{5}{13}=1/2+1/1+1/1+1/2 \qquad \frac{8}{13}=1/1+1/1+1/1+1/1+1/2$$

XVI.

Näherungswerte zweier Brüche, die sich zur Einheit ergänzen.

In XIV haben wir eine Betrachtung über die positiven Entwicklungen zweier Brüche, die sich zu 1 ergänzen, eingeschoben, die uns leicht eine Beziehung zwischen den Näherungswerten dieser Brüche erkennen lässt. Wir haben dort gezeigt, dass sich die positiven

Entwicklungen zweier solcher Brüche nur dadurch unterscheiden, dass das Glied $1/q_1$ in der Entwicklung des Bruches, der $< \frac{1}{2}$ ist, in der anderen Entwicklung durch die beiden Glieder $1/1 + 1/(q_1 - 1)$ ersetzt ist.

Haben wir umgekehrt 2 Entwicklungen, die sich nur dadurch unterscheiden, dass die eine mit $1/q_1$, die andere mit $1/1 + 1/(q_1 - 1)$ beginnt, so ergänzen sich die durch die beiden Entwicklungen dargestellten Brüche zu 1.

Lassen wir nämlich in der ersten das Glied $1/q_1$, in der zweiten die Glieder $1/1 + 1/(q_1 - 1)$ fort, so stellen die noch übrigen Glieder in beiden Fällen denselben Bruch $\frac{m}{n}$ dar. Die erste Entwicklung können wir daher gleich $1/q_1 + \frac{m}{n}$, die zweite gleich $1/1 + 1/(q_1 - 1) + \frac{m}{n}$ setzen. Nun ist aber

$$1/q_1 + \frac{m}{n} = \frac{n}{n\,q_1 + m};$$

$$1/1 + 1/(q_1 - 1) + \frac{m}{n} = \frac{n(q_1 - 1) + m}{n(q_1 - 1) + m + n} = \frac{(nq_1 + m) - n}{n\,q_1 + m};$$

Die beiden Brüche ergänzen sich also zu 1.

Da die Summe der Teilnenner für beide Entwicklungen dieselbe ist, so haben beide Brüche gleichviel Näherungswerte. Jede positive Entwicklung liefert uns aber auch eine positive Entwicklung für jeden Näherungswert. Brechen wir in beiden Entwicklungen an zwei entsprechenden Stellen ab, so erhalten wir die Entwicklungen für zwei in den Reihen der Näherungsbrüche an gleicher Stelle stehende Werte. Beide Entwicklungen unterscheiden sich aber nur auf dieselbe Weise wie die beiden Gesamtentwicklungen. Es gilt deshalb für die beiden Näherungswerte dasselbe wie für die ursprünglichen Brüche. Wir haben daher den Satz:

Zwei echte Brüche, die sich zur Einheit ergänzen, haben gleich viel Näherungswerte. Je zwei entsprechende Näherungswerte ergänzen sich ebenfalls zur Einheit.

Lebenslauf.

Am 14. Dezember 1871 wurde ich, Hermann Bach, zu Sprendlingen in Rheinhessen als Sohn des Lehrers Franz Bach geboren. Vom 6. bis zum 12. Jahre besuchte ich die Volksschule meines Heimatsortes und trat dann in die Realschule zu Alzey ein, aus der ich Ostern 1888 entlassen wurde. Von 1888 bis 1890 bereitete ich mich auf dem Lehrerseminar zu Alzey zum Lehrerberufe vor. Darauf war ich 11 Jahre als Lehrer tätig und zwar 4 Jahre an der Stadtschule zu Alzey und 7 Jahre an der Stadtschule zu Darmstadt. Ostern 1900 unterzog ich mich an der Grossh. Oberrealschule zu Darmstadt der Reifeprüfung, um mich dem Studium für das höhere Lehrfach widmen zu können. Während des Sommersemesters 1900 und des Wintersemesters 1900/01 hörte ich an der Technischen Hochschule zu Darmstadt Vorlesungen über Mathematik und Physik bei den Herren: Dingeldey, Forch, Gräfe, Schering, Wiener, Zeissig. Von Ostern 1901 ab studierte ich an der Landesuniversität zu Giessen Mathematik, Physik und deutsche Sprache. Ich besuchte während dieser Zeit die Vorlesungen der Herren: Behaghel, Drude, Fromme, Haussner, Messer, Netto, Pasch, Siebeck. Allen meinen Lehrern bin ich zu grossem Danke verpflichtet, besonders aber Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. Netto, der die Anregung zu vorliegender Dissertation gab und mich bei deren Ausarbeitung mit seinem geschätzten Rate unterstützte.